数理物理シリーズ

フォック空間と量子場

［下］

新井朝雄 著

日本評論社

●

［編集］

荒木不二洋

江沢 洋

数理物理シリーズの刊行にあたって

「数理物理シリーズ」の刊行にあたり，数理物理学とは何かを説明し，シリーズの意図を明かにしておきたい．

物理学は自然の構造と仕組みを見極めようとする．これに対して数学は客観的な知識を目的とするあらゆる科学の理論を，簡単かつ厳密に表現する最上の記述形式を与えるものである．秋月康夫は『現代数学概観』(筑摩書房，1970) において「数学は元来，無限を対象とするもので，経験では得られない超限的な理論だ」ということを強調した．物理は，それを利用している．たとえば速度として測定できるのは有限時間 Δt におこる変位 Δx であるが，数学は極限 $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t$ を発明し，それによって Δt の選択によらない客観性を実現した．力学は，これに負うところが大きい．相転移の統計力学も無限系を考えることで明確に定式化される．

物理学と数学との接点に数理物理学はある．英語でいうと mathematical physics だ．物理数学というものもあるが，これは mathematical methods for physics だろう．

ロシアの R. L. Dobrushin は，統計力学を確率論的に深めた多くの著しい業績をもつが,「仕事は何か」と問われて「応用数学を純粋数学にすること」と答えたとか．これにならって，数理物理学とは物理に用いられた数学を純粋数学にすることだ，といってもよさそうだ．

かつて山内恭彦は，著書『物理数学』(岩波書店，1963) の序文にこう書いた：

> 科学の進歩に応じて，その理論を表すのに適当な数学が要求され，ときに未熟な形で科学者に考案されて ··· まだ数学になり切っていない昆虫の幼虫みたいな時期のものがある．それは科学者からみると本質的の部分は間違いなく取り入れられていると思われるのであるが，数学者からみると甚だあやしげなものである．

山内は，これを数学に対する大きな栄養源であるとしつつ，その生の形を提示することが物理の学生には数学の理解に役立つと考えたのである．この見解の背景には，自らも開拓に参加した群論の量子力学への応用があり，また P. A. M. Dirac が量子

力学の表記に用いた δ 関数を L. Schwartz が超関数として数学的に脱皮させたこと (1945) の衝撃がまだ生々しかったということがあるだろう．山内の近くでは佐藤幹夫がハイパー・ファンクションの理論を生みだしていた (1958)．後年，これは局所解析の理論として開花し，物理との交渉を一層つよめることになる．

物理学，あるいは広く科学の側からみても，その理論の表現を未熟な形に残すのは本意ではない．たとえば，量子力学で用いられる摂動級数は収束するのか，散乱問題の波動関数は時間 $t \to \infty$ でどう振る舞うのかなど，だれでも気になることである．これも山内の近くで，加藤敏夫は J. von Neumann 作の『量子力学の数学的基礎』という額縁に細密画を描き入れはじめ，それは世界的に大きな潮流をよびおこすにいたった．

場の量子論では，発散の困難に促された数学的な分析が A. S. Wightmann や R. Haag らによって 1950 年前後からはじめられた．彼らは数学的な注意深さなしには一歩も前進できないと考えたのである．その努力の中で物理的にも興味ふかい多くの数学的現象が次々に発見された．それは量子力学の定式化に反省を促したばかりでなく，今日では無限自由度の多体問題，統計力学をとおして物性物理にも波及している．

Dobrushin のいう「純粋数学にすること」は，単に数学のためばかりではないのである．

こうして，数理物理学の発展は始まった．上の例は量子力学の方面に偏っているが，ほかにも相対論あり，非線型問題ありで及ぶところは広くかつ深い．最近では，わが国でも物理学者の関心が高まり，数学者の参加も急増している．

しかし，新興分野の常として，これから勉強をはじめる学生や他分野の研究者がこれについて知ろうとすると，すぐ読める教科書がなく，個々のトピックスについて専門誌から探し集めた断片的な情報を自己流にまとめるほかない．

この「数理物理シリーズ」は，このような状況に応えるために企画した．研究の第一線につながる入門書を提供し，さらには数理物理学の動きを生き生きとした姿で広い層に伝えたい．

この目的のためには，シリーズ全体としても，また一冊一冊においても，基礎的な部分のわかりやすい解説と，主題の雰囲気を伝える中心的な概念構成や理論の展開，その分野の展望とその中での位置づけなど，いろいろの要素がバランスよく混ざっていることが望ましい．それを読みやすい長さにまとめるには，題材の選択も必要となろうし，証明や説明にも，細部にこだわらず本質を突くわかりやすさを狙った工夫が必要になることも多かろう．細部まで完全なていねいな説明が望まれる場合には，躊

躇しない．

　このシリーズは，物理学の人には数学を，数学の人には物理を近づきやすくするものでなければならない．物理の理論の数学的展開はもとより，数理物理学でよく使われる数学や，物理学に触発されて進展した数学のトピックスも取り入れて，物理と数学が有機的に混じり合ったものにしたい．山内のいう「昆虫の幼虫」も，それとわかる形にすれば入れてよいだろう．理論の発展史も役に立つだろう．物理の理論の新展開に数学の側からの自由なコメントを組み合わせて一冊とすることも試みたい．

　こうして,「数理物理シリーズ」は，基礎的なテーマに時の話題を加えて，特に若い人々の興味をかきたて，物理と数学の両方の人々の役に立つようなものに育ててゆきたい．このシリーズに終わりはない．物理，数学にも数理物理にも終わりはないはずだから．

　御声援を心からお願いする．

1998 年 4 月

編者/荒木不二洋 (東京理科大学)
江沢 洋 (学習院大学)

まえがき

量子場は，物質の極微の構成要素である素粒子の本性を原理的に記述するための数学的対象として考案された．いまからおよそ 70 年前のことである．量子場を根本的な概念として構想される理論 = 場の量子論は，相互作用をしない素粒子を記述する自由場の理論の範疇においては，素粒子の波動像と粒子像を見事に統一的に記述するものとして成功をおさめた．だが，相互作用をする素粒子たちによってひきおこされる現象に場の量子論を適用すると“発散の困難”とよばれる深刻な事態に遭遇した．これは，換言すれば，素粒子の相互作用を記述する量子場が実際に数学的に存在するかどうかという問題にほかならなかった．この問題は，1950 年代からはじまる，場の量子論の数学的に厳密な研究の主要な動機のひとつとなる．このようにして開始された，量子場に関わる数学の研究は，現代の数理物理学・物理数学の大きな潮流のひとつを形成するにいたった．場の量子論における数学的諸問題の研究から多くの興味深い数学理論が生まれ，互いに刺激しあいながら，いろいろな方向へと発展してきている．こうした発展は，量子場という理念が内蔵する数理の豊かさを示すとともに，場の量子論が数学のほとんどすべての領域と陰に陽に関連していることをうかがわせる．本書は，そのような，なかなかとらえ難いけれどもたいへん魅力的な量子場という対象に関わる数学的理論の一部を初学者向けに叙述し，解説したものである．

量子場の構造や性質を数学的に厳密な仕方で研究する方法には大きく分けて 2 つある．公理論的方法と構成的方法である．前者は量子場に関して，いくつかの基本的な性質を公理系として設定し，そこから何が導出されるかを見極めようとする．この方法は，量子場の個々のモデルによらない一般的な性質の解析に有効である．他方，後者は，量子場の個々のモデルを実際に構成することによってその存在を証明するとともに，構成されたモデルの数学的・物理的諸性質を明らかにしようとするものである．だが，この分け方は便宜的なものにすぎず，実際には，公理論的方法と構成的方法は互いに補完しあうものである．むしろ，これら 2 つの方法を補完的に用いることにより，より高く，深く，広い認識が達成される．

場の量子論の公理論的方法に関する入門書は優れたものがすでにいくつか出版さ

れている．だが，構成的方法については，有限自由度の (非相対論的) 量子力学の数学理論の標準的な部分を学んだ人が，それほど難なく，引き続いて読むことができ，かつ現在進行中の研究へ入ってゆくことが可能であるように組織だてて書かれた入門書はまだないように見える．本書はそのような書物のひとつたらんことを目指すものである．本書を読むためには拙著『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版，1997) と同程度の知識があればよい．実際，本書は，この前著の続編のひとつとみなされるべきものである．本書は基本的に独習書として書かれているが，もちろん，セミナーや講義のテキストとして使うことも可能である．

本書の構成について若干述べておきたい．本書は 2 巻に分かれている．第 1 巻 — 序章から 6 章まで — の目的は，序章を除いて，量子場の数学の中心的理念のひとつをなすフォック空間の理論を詳述することである．フォック空間というのは或る型のヒルベルト空間であって，その最初の具象的形態は，ロシアの理論物理学者 V. A. フォックによって 1932 年に導入された．フォック空間は，場の量子論の文脈では，無限個の素粒子からなる系の状態ベクトルの空間を記述するために使われる．素粒子には，ボソン (ボース粒子) とフェルミオン (フェルミ粒子) という 2 種類の族がある (詳しくは 4 章 4-1 節を参照)．これに対応して，フォック空間には基本的に 3 種類ある．同種のボソンからなる系の状態ベクトルの空間を記述するフォック空間はボソンフォック空間とよばれ，同種のフェルミオンからなる系の状態ベクトルの空間を記述するフォック空間はフェルミオンフォック空間とよばれる．さらに，同種のボソンと同種のフェルミオンからなる系の状態ベクトルを記述するヒルベルト空間として，ボソン-フェルミオンフォック空間がある．

序章は「量子場がいかなるものであるか，あるいは，あるべきか」についてのおおまかな観念を読者に提示するとともに量子場に関わる数学的諸問題を概観することを目的としている．この中には，フォック空間の理論への動機づけも含まれている．序章の叙述は，したがって，多くの物理の教科書と同様，形式的・発見法的であり，数学的に厳密ではない．この点は，まず，お断りしておかなければならない (ただし，古典場の理論に関する部分は容易に厳密化可能である)．言うまでもなく，数学的に厳密に証明されない事柄は真理として認めることはできない．だが，量子場の数理物理学に限らず，現代的な厳密な数理物理学あるいは物理数学を研究しようとするならば，この種の形式的・発見法的議論も — それが数学的に厳密でないことを明晰に意識しつつ — てきぱきとできることが望まれる．

1 章から 6 章までは，第 2 巻への応用を念頭におきつつも，それ自体，純粋に数学の理論として読めるように書いた．しかも，可能な限り，一般的・抽象的な形で理

論展開をおこなった．こうすることにより，より高次の普遍的な数学的構造があらわにされ，フォック空間が属する数学的理念界の領域を透徹した明晰な認識のもとに俯瞰することが可能となる．これは美的な意味でも人を深く満足させうるものであると思う．しかも，こうした認識方法は応用上も極めて強い力となりうる．なぜなら，真の抽象は，事物の本質あるいは存在の源泉へと“遡行”する方法だからである．

なお，6 章は著者の創始になる理論 — ボソン-フェルミオンフォック空間上の Dirac 作用素の理論 — の解説であり，本の一部として，叙述されるのはこれが初めてである．

第 2 巻では，第 1 巻の理論の応用編としての量子場の理論を叙述する．公理論的方法の短い叙述である 7 章 (量子場の一般論) を除いて，量子場の個々のモデルを構成し，その基本的性質を論じる．8 章から 11 章にわたって，自由場のクラスに属する量子場を全部で 4 種類構成する：(i) de Broglie 場 — 非相対論的物質場 (8 章)；(ii) Klein-Gordon 場 — 相対論的スカラー場 (9 章)；(iii) 電磁場 (10 章)；(iv) Dirac 場 — 相対論的スピノル場 (11 章).

はじめに述べたように，自由場は相互作用をする素粒子を記述するものではない．相互作用を記述するモデルの論述は 12 章，13 章でなされる．12 章では，van Hove モデルとよばれるモデルを扱う．これは，相互作用をもつ量子場の雛形(ひながた)として，多くの研究者によって，すでによく解析されているモデルである．しかし，本書では，このモデルを抽象的な形で論じ，モデルの普遍的構造を明るみに出した．さらに，質量 0 の素粒子に関わる赤外発散の問題を詳しく論じたのも新しい点である．13 章は，複数の非相対論的量子的粒子と量子場が相互作用をする系のモデルの構成と解析に関するものである．ここでは，この分野の最新の研究に直結する内容が論じられている．

はじめの計画では，6 章 (ボソン-フェルミオンフォック空間) の応用として，超対称性 — ボソンとフェルミオンの入れ換えに関する対称性 — をもつ量子場の理論，すなわち，超対称的場の量子論の数学的構成も論じる予定であったが，これは，紙数の都合上，割愛せざるをえなくなった．それゆえ，6 章は，本書を通読する上では，最後にまわすことも可能である．

本書を自己完結的にするために — 読者が他の本を参照しなくても，本書の基本的内容を理解し通読できるように — 付録をつけた．付録 A ～ C と E には，ヒルベルト空間と自己共役作用素の理論に関わる，いくつかの基本的な事柄をまとめ，付録 D では緩増加超関数の理論の要項を叙述した．

各章の終わりに「ノート」として，章の主題に対する著者の見方や関連する研究の方向を述べておいた．本書を読んだあとで，どちらの方向に学習や研究を進めるべきかを決める際の参考になれば幸いである．文献表も同様の意味でつけてある．ただし，この文献表はもちろん完全なものではなく，本書の内容と著者の興味に呼応する形でかなり偏っているといわなければならない．場の量子論の数学的研究に関わる文献資料のひとつにはなろうかと思う．

各章末の演習問題において「♮」のついたものは，本文で指示した問題である．より高次の数学的知覚能力と思考力を身につけるには，やはり，問題を数多く解くことが必要である．

本書が「数理物理シリーズ」の一冊として刊行されることは著者の大きな喜びである．編者の荒木不二洋先生と江沢 洋先生ならびに日本評論社の亀井哲治郎氏に心から感謝したい．また，日本評論社の高橋健一氏には執筆予定の打ち合わせや本書の原稿の校正などでたいへんお世話になった．厚くお礼申し上げる．

2000 年 白樺が新緑に輝く頃，札幌にて
新井朝雄

ギリシャ文字一覧表

A,	α	アルファ	N,	ν	ニュー
B,	β	ベータ	Ξ,	ξ	グザイ
Γ,	γ	ガンマ	O,	o	オミクロン
Δ,	δ	デルタ	Π,	π	パイ
E,	ϵ	イプシロン	P,	ρ	ロー
Z,	ζ	ゼータ	Σ,	σ	シグマ
H,	η	イータ	T,	τ	タウ
Θ,	θ	シータ (テータ)	Υ,	υ	ウプシロン
I,	ι	イオタ	Φ,	ϕ	ファイ
K,	κ	カッパ	X,	χ	カイ
Λ,	λ	ラムダ	Ψ,	ψ	プサイ
M,	μ	ミュー	Ω,	ω	オメガ

記号の対応表

A,	$\mathfrak{A}$,	$\mathfrak{a}$,	$\mathscr{A}$	N,	$\mathfrak{N}$,	$\mathfrak{n}$,	$\mathscr{N}$
B,	$\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{b}$,	$\mathscr{B}$	O,	$\mathfrak{O}$,	$\mathfrak{o}$,	$\mathscr{O}$
C,	$\mathfrak{C}$,	$\mathfrak{c}$,	$\mathscr{C}$	P,	$\mathfrak{P}$,	$\mathfrak{p}$,	$\mathscr{P}$
D,	$\mathfrak{D}$,	$\mathfrak{d}$,	$\mathscr{D}$	Q,	$\mathfrak{Q}$,	$\mathfrak{q}$,	$\mathscr{Q}$
E,	$\mathfrak{E}$,	$\mathfrak{e}$,	$\mathscr{E}$	R,	$\mathfrak{R}$,	$\mathfrak{r}$,	$\mathscr{R}$
F,	$\mathfrak{F}$,	$\mathfrak{f}$,	$\mathscr{F}$	S,	$\mathfrak{S}$,	$\mathfrak{s}$,	$\mathscr{S}$
G,	$\mathfrak{G}$,	$\mathfrak{g}$,	$\mathscr{G}$	T,	$\mathfrak{T}$,	$\mathfrak{t}$,	$\mathscr{T}$
H,	$\mathfrak{H}$,	$\mathfrak{h}$,	$\mathscr{H}$	U,	$\mathfrak{U}$,	$\mathfrak{u}$,	$\mathscr{U}$
I,	$\mathfrak{I}$,	$\mathfrak{i}$,	$\mathscr{I}$	V,	$\mathfrak{V}$,	$\mathfrak{v}$,	$\mathscr{V}$
J,	$\mathfrak{J}$,	$\mathfrak{j}$,	$\mathscr{J}$	W,	$\mathfrak{W}$,	$\mathfrak{w}$,	$\mathscr{W}$
K,	$\mathfrak{K}$,	$\mathfrak{k}$,	$\mathscr{K}$	X,	$\mathfrak{X}$,	$\mathfrak{x}$,	$\mathscr{X}$
L,	$\mathfrak{L}$,	$\mathfrak{l}$,	$\mathscr{L}$	Y,	$\mathfrak{Y}$,	$\mathfrak{y}$,	$\mathscr{Y}$
M,	$\mathfrak{M}$,	$\mathfrak{m}$,	$\mathscr{M}$	Z,	$\mathfrak{Z}$,	$\mathfrak{z}$,	$\mathscr{Z}$

目　次

第 1 巻目次

第 7 章

量子場の一般論

量子場に関する一般的な概念と枠組みを論述する.

7-1 節　はじめに

本章から, 量子場の数学的理論の論述に入る. 場の量子論の数学的研究には, 大きく分けて, 2 つのアプローチがある. 1 つは, 場の量子論の個々のモデルに依存しない一般的な数学的構造の研究であり, もう 1 つは具体的な個々のモデルの厳密で詳細な研究である. 前者は, 総称的に**公理論的場の量子論** (axiomatic quantum field theory) あるいは**量子場の一般論**とよばれる. 他方, 後者は**構成的アプローチ**とよばれる. この章では, 量子場の一般論がどのようなものであるかを簡単に見ておく. 本書は, 場の量子論に対する構成的アプローチへの数学的基礎をあたえることを主眼とするものであるから, 量子場の一般論の叙述は, 場の量子論の数学的研究への入門者が, これくらいは理解し, 知っておいてほしいと思われる必要最小限度の事柄に限定した.

序章でふれたように, 量子場の概念へと到る 1 つの道は, 古典場に対して, 有限自由度の量子力学の本質の 1 つをなす正準交換関係あるいは正準反交換関係を形式的に適用することである. しかし, 宇宙のあらゆる物理的現象を支える根源的理念として場の量子論をとらえる観点からは, 量子場の概念を, 古典場とは独立に, アプリオリに定義する必要がある. この見地からは, 古典場は, 量子場の理論においてプランクの定数 h を 0 にもっていく古典的極限として位置づけられねばならない. この章の目的は, いま述べた意味での量子場の一般概念を定義し, その基本的な性質を調べることである.

7-2 節　作用素値超関数

$\mathscr{F}$ をヒルベルト空間とする．

定義 7-1　$d \in \mathbb{N}$ とする．$\mathscr{D}$ を $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間とする[1]．各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{F}$ 上の稠密に定義された線形作用素 $\varphi(f)$ が対応し，次の条件 $(\varphi.1) \sim (\varphi.3)$ をみたすとき，この対応 $\varphi : f \longrightarrow \varphi(f)$ を，$(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の**作用素値超関数** (operator-valued distribution) という．

$(\varphi.1)$　すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{D} \subset D(\varphi(f)) \cap D(\varphi(f)^*)$．

$(\varphi.2)$(線形性)　すべての $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で，$\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$．

$(\varphi.3)$(連続性)　任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$ に対して，写像 $f \longrightarrow \langle \Psi, \varphi(f)\Phi \rangle_{\mathscr{F}}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続である (言い換えると，写像 $f \longrightarrow \langle \Psi, \varphi(f)\Phi \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数であるということ)[2]．

注意 7-1　条件 $(\varphi.1)$ により，$D(\varphi(f)^*)$ は稠密であるので，補題 2-1 によって，$\varphi(f)$ は可閉作用素である．

$\mathscr{F}$ 上の線形作用素の全体を $\mathfrak{L}(\mathscr{F})$ とする．この概念を用いると，$(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の作用素値超関数というのは，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathfrak{L}(\mathscr{F})$ への写像 φ で上記の $(\varphi.1) \sim (\varphi.3)$ をみたすものである，と言い換えることができる．

作用素値超関数 φ に対して，$\varphi(f)$ を

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x)\, dx$$

のように書くことによって，形式的シンボル $\varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ を導入し，これを φ の**作用素値超関数核**という．

感覚的描像として，慣習的あるいは象徴的に，「作用素値超関数核 $\varphi(x)$ を f で “均す” と $\varphi(f)$ が得られる」という言い方をする場合がある．だが，もちろん，こうした言い方が実際的な意味をもつのは，$\varphi(x)$ が関数であたえられる場合だけである．

$(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の 2 つの作用素値超関数 φ_1, φ_2 が，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\varphi_1(f)\Psi = \varphi_2(f)\Psi$ をみたすとき，$\mathscr{D}$ 上で $\varphi_1 = \varphi_2$ が成り立つという．

---

[1] 付録 D を参照.

[2] 付録 D を参照.

例 7-1　S を $\mathscr{F}$ 上の稠密に定義された閉作用素で，$D(S)\cap D(S^*)$ は稠密であるとする．F, G を $\mathbb{R}^d$ 上の任意の緩増加超関数とする．すなわち，$F, G \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$．写像 $\varphi_{F,G}^S : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathscr{F})$ を

$$\varphi_{F,G}^S(f) := F(f)S + G(f)S^*, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．このとき，$\varphi_{F,G}^S(f)^* \supset F(f)^*S^* + G(f)^*S$ (S は閉であるから，$S^{**} = S$)．したがって，$D(S)\cap D(S^*) \subset D(\varphi_{F,G}^S(f))\cap D(\varphi_{F,G}^S(f))^*$．$F, G$ の線形性によって，$\varphi_{F,G}^S$ は線形である．任意の $\Psi, \Phi \in D(S)\cap D(S^*)$ に対して，

$$\langle \Psi, \varphi_{F,G}^S(f)\Phi\rangle = F(f)\langle \Psi, S\Phi\rangle + G(f)\langle \Psi, S^*\Phi\rangle$$

であり，対応：$f \longrightarrow F(f)$, $f \longrightarrow G(f)$ は連続であるから，$\varphi_{F,G}^S$ の連続性がしたがう．したがって，$\varphi_{F,G}^S$ は，$(\mathscr{F}, D(S)\cap D(S^*))$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の作用素値超関数である．

$G = 0$, $S = I$ の場合を考えると，$\varphi_{F,0}^I = F$．したがって，この意味で，緩増加超関数は，作用素値超関数の特殊な場合と見ることができる．別の言い方をすると，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ は作用素値超関数の空間の中へ埋め込まれるということである．

また，$F = \delta_a$ (点 $a \in \mathbb{R}^d$ におけるデルタ超関数：付録 D の例 D-3 を参照)，$G = 0$ である場合を 考えると，

$$\varphi_{\delta_a,0}^S = \delta_a S.$$

この作用素値超関数の核は $\delta(x-a)S$ である．これは作用素値関数ではない．

例 7-2　$T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathscr{F})$ を $\mathbb{R}^d$ 上の $\mathfrak{L}(\mathscr{F})$-値関数で次の性質をみたすとする：

(i)　稠密な部分空間 $\mathscr{D}_T \subset \mathscr{F}$ があって，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathscr{D}_T \subset D(T(x))$．

(ii)　任意の $\Psi \in \mathscr{D}_T$ に対して，$\mathscr{F}$-値関数：$x \longrightarrow T(x)\Psi$ はルベーグ可測 (1 章，1-3 節を参照) であり，関数：$x \longrightarrow \|T(x)\Psi\|$ は $\mathbb{R}^d$ 上，多項式的に有界．

このとき，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ と $\Psi \in \mathscr{D}_T$ に対して，$\int_{\mathbb{R}^d} \|T(x)\Psi\||f(x)|\,dx < \infty$ であるから，Ψ を固定して，$\mathscr{F}$ 上の汎関数 F を

$$F(\Phi) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle T(x)\Psi, \Phi\rangle f(x)^* dx, \quad \Phi \in \mathscr{F},$$

によって定義できる．F は線形であり，シュヴァルツの不等式により，

$$|F(\Phi)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|T(x)\Psi\||f(x)|\,dx\right)\|\Phi\|$$

であるから，F は有界でもある．したがって，Riesz の表現定理により，$F(\Phi) = \langle \Psi_T, \Phi\rangle$ $(\Phi \in \mathscr{F})$ をみたす $\Psi_T \in \mathscr{F}$ がただ 1 つ存在する．これによって，$\mathscr{D}_T$ を定義域とする写像 $\varphi_T(f)$ が $\varphi_T(f)\Psi = \Psi_T$ によって定義される．これが線形であることは容易にわかる．こうして，各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle \varphi_T(f)\Psi, \Phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T(x)\Psi, \Phi\rangle f(x)^* \, dx, \quad \Psi, \Phi \in \mathscr{F},$$

をみたす線形作用素 $\varphi_T(f)$ が存在することが示される．この線形作用素を象徴的に

$$\varphi_T(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)T(x)\, dx$$

と書く．任意の $\Phi, \Psi \in \mathscr{F}$ に対して，$T_{\Phi,\Psi}(x) := \langle \Phi, T(x)\Psi\rangle$ とすれば，

$$\langle \Phi, \varphi_T(f)\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} T_{\Phi,\Psi}(x) f(x)\, dx.$$

$|T_{\Phi,\Psi}(x)| \le \|\Phi\|\|T(x)\Psi\|$ であるから，関数 $T_{\Phi,\Psi}$ は多項式的に有界である．したがって，付録 D の例 D-1 によって，対応 $f \longrightarrow \langle \Phi, \varphi_T(f)\Psi\rangle$ は緩増加超関数である．$\varphi_T(f)$ の f に関する線形性は自明．ゆえに，φ_T は作用素値超関数である．

この例の場合，実は，上記のシンボル "$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)T(x)\, dx$" に厳密な意味をつけることができる：

(i)　任意の $\Psi \in \mathscr{D}_T$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の $\mathscr{F}$-値関数：$x \longrightarrow T(x)\Psi$ が連続である場合は，$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)T(x)\Psi\, dx$ は $\mathscr{F}$-値リーマン積分として意味をもち，$\varphi_T(f)\Psi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)T(x)\Psi\, dx$ が $\mathscr{D}_T$ 上で成立する．

(ii)　$\mathbb{R}^d$ 上の $\mathscr{F}$-値関数：$x \longrightarrow T(x)\Psi$ $(\Psi \in \mathscr{D}_T)$ が必ずしも連続でない場合には，$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)T(x)\Psi\, dx$ をボッホナー積分 (付録 E を参照) の意味でとれば，$\varphi_T(f)\Psi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)T(x)\Psi\, dx$ が成立する．この意味で，φ_T の核は作用素値関数 $T(x)$ であたえられるとみなすことができる．

例 7-3　$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ を考えよう．このフォック空間での消滅作用素を $a(f)$ $(f \in L^2(\mathbb{R}^d))$，個数作用素を N_{b} とする．任意の $\Psi, \Phi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，対応 $f \longrightarrow \langle \Psi, a(\bar{f})\Phi\rangle$ $(f \in L^2(\mathbb{R}^d))$ は線形である ($\bar{f}$ は f の複素共役)．命題 4-25 によって，

$$\|a(\bar{f})\Psi\| \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\Psi\|, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}).$$

$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $(2N > d)$ とすれば，

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{-2N}(1+|x|)^{2N}|f(x)|^2\,dx$$
$$\leq \|f\|_{N,0}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|)^{2N}}\,dx < \infty.$$

ここで，記号 $\|\cdot\|_{m,\alpha}$ は，付録 D の (D.1) で定義されるものである．したがって，$f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ $(n \longrightarrow \infty)$ $(f_n, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ ならば，$\|a(\bar{f}_n)\Psi - a(\bar{f})\Psi\| \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$．これから，対応 $f \longrightarrow \langle \Psi, a(\bar{f})\Phi\rangle$ $(\Psi, \Phi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}))$ は緩増加超関数であることがわかる．ゆえに，$a(\bar{f})$ は作用素値超関数である．同様にして，対応 $f \longrightarrow a(f)^*$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ は作用素値超関数である．

φ を $(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の作用素値超関数としよう．このとき，任意の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ $(\alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ に対して，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathfrak{L}(\mathscr{F})$ ($\mathscr{F}$ 上の線形作用素の空間) への写像 $D^\alpha \varphi$ を

$$(D^\alpha \varphi)(f) := (-1)^{|\alpha|}\varphi(\partial^\alpha f) \tag{7.1}$$

によって定義すれば，これも $(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の作用素値超関数になる (付録 D-2 節を参照)．これを**作用素値超関数 φ の $|\alpha|$ 階の偏微分**とよぶ．緩増加超関数の偏微分の場合と同様に，$\alpha = (0, \cdots, 0, \alpha_j, 0, \cdots, 0)$ (j 成分以外は 0) の場合，

$$D^\alpha = D_j^{\alpha_j}$$

と記す．すると，任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha \varphi = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} \varphi$$

が成り立つ．ここで，右辺の偏微分の順序は任意でよい．

作用素値超関数 φ の**フーリエ変換** $\hat{\varphi}$ を，通常の緩増加超関数の場合と同様に，

$$\hat{\varphi}(f) := \varphi(\hat{f}), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{7.2}$$

によって定義する．ここで，$\hat{f}$ は f のフーリエ変換である (付録 D の (D.14) を参照)．

7-3 節　量子場の一般概念

7-3-1　量子場の理論の定義

d 次元空間における量子系を考える．したがって，時間と空間を合わせた時空の次元

は $\nu = 1 + d$ である．$\mathbb{R}^\nu$ の点を $x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ のように表す．物理的には，x_0 は時間変数，$\boldsymbol{x}$ は空間変数を表わす．

一般に，量子力学系の状態はヒルベルト空間の零でないベクトルによって，物理量は自己共役作用素によって表される[3)]．特に，系の全エネルギーを記述する自己共役作用素はハミルトニアンとよばれ，重要な物理量の 1 つである．

序章の発見法的考察から示唆されるように，量子場というのは，素粒子の生成・消滅が起こり得る無限自由度の量子系に関わる対象であって，素粒子を生成したり消滅させたりする機能をもつものであることが要請される．アプリオリには，量子場自身は物理量である必然性はないが，状態のヒルベルト空間上で働く線形作用素であり，他の物理量と調和的・法則的に関わっていることが期待される．こうして，量子場の一般的な概念は，他の物理量との関連を度外視しては成立し得ないことが暗示される．そこで，ここでは，まず，ハミルトニアンとの関連において，量子場の一般概念を定義することを試みる．

各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ と $a = (a_0, \boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，関数 f_a を

$$f_a(x) := f(x_0 - a_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^\nu, \tag{7.3a}$$

によって定義する．これは，要するに，関数 f の，ベクトル a による並進である．容易にわかるように，$f_a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ である．D_μ $(\mu = 0, 1, \cdots, d)$ を $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ 上の，変数 x_μ に関する一般化された偏微分作用素とすれば，$L^2(\mathbb{R}^\nu)$ における等式として

$$f_a = e^{-i \sum_{\mu=0}^{d} a_\mu(-iD_\mu)} f \tag{7.3b}$$

が成立する[4)]．

定義 7-2 ν **次元時空** $\mathbb{R}^\nu$ **上の，ハミルトニアンをもつ量子場の理論**とは，以下の (QF.1)〜(QF.4) の性質をもつ数学的対象の組 $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, H, (\varphi_r)_{r=1}^s\}$ $(s \in \mathbb{N})$ である．

(QF.1) $\mathscr{F}$ はヒルベルト空間で，$\mathscr{D}$ は $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間である．

(QF.2) H は $\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素である．

(QF.3) $(\varphi_r)_{r=1}^s$ $(s \in \mathbb{N})$ は $(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^\nu$ 上の作用素値超関数の組であり，各 $\varphi_r(f), \varphi_r(f)^*$ は $\mathscr{D}$ を不変にする：

$$\varphi_r(f)\mathscr{D} \subset \mathscr{D}, \quad \varphi_r(f)^*\mathscr{D} \subset \mathscr{D}.$$

---

3) 新井 (1997a) の 6 章，新井-江沢 (1999b) の 3 章を参照.

4) 新井 (1997a) の p.145，例 4.7 を参照.

(QF.4)　任意の $t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$\varphi_r(f_{(t,\mathbf{0})}) = e^{itH/\hbar}\varphi_r(f)e^{-itH/\hbar}, \quad r = 1, \cdots, s, \tag{7.4}$$

が $\mathscr{D}$ 上で成立する．ここで，$\hbar > 0$ は定数パラメータである (物理的には，h をプランクの定数として，$\hbar = h/(2\pi)$).

この場合，φ_r $(r = 1, \cdots, s)$ を**量子場**，H を**ハミルトニアン**，$\mathscr{F}$ を考察下の量子場に関する状態のヒルベルト空間とよぶ．

この定義に関して，若干の注意をしておく．

(1) 量子場を作用素値関数ではなく作用素値超関数としてとらえる発見法的理由については，序章において，無限連続自由度の CCR の表現の観点から，簡単にふれた．しかし，CCR を仮定しない場合でも，相対論的に自然な要請をおくと，作用素値関数としての量子場は自明なもの，すなわち，定数作用素 (定数倍をかける作用素) しか存在しないことが示されてしまうのである (ボゴリューボフ他 (1972) の定理 3.2.4 を参照).

(2) 上の定義は，量子場とハミルトニアンの関係だけに注目した，一般的な定義であり，考える理論が，相対論的であるか否かにはよらない[5]．物理的な意味は次の通りである．関数 $f_{(t,\mathbf{0})}$ は，関数 f の**時間並進**を表す (t は時間変数). したがって，$\varphi_r(f_{(t,\mathbf{0})})$ は，量子場 φ_r の時間並進をあたえる．(QF.4) の特性は，時間並進した量子場が，時間並進しない量子場と (部分空間上 $\mathscr{D}$ で) ユニタリ的に結びついていること示す．この性質を，量子場の時間並進に関する**ユニタリ共変性**という．このユニタリ共変性を司るユニタリ作用素たちは，1 パラメータ強連続ユニタリ群 $\{e^{itH/\hbar}\}_{t\in\mathbb{R}}$ を形成し，その生成子がハミルトニアンである．時間並進した量子場は，時間並進しない量子場の，ハミルトニアン H に関するハイゼンベルク作用素になっている[6].

(7.4) を作用素値超関数核を用いて，象徴的に書けば，

$$\varphi_r(x_0 + t, \boldsymbol{x}) = e^{itH/\hbar}\varphi_r(x)e^{-itH/\hbar} \tag{7.5}$$

と表される．

(3) 定義 7-2 は，物理的には，時間並進に対してユニタリ共変な量子場の一般概念をあたえる．この枠組みに，より多くの対称性の構造 — たとえば，空間並進共変性，空間回転共変性，ポアンカレ共変性等 — が加わることにより，量子場の理論はさらに限定された形をとることになる (以下の論述を参照).

(4) 上の定義における自然数 s は，場の種類 (スカラー場，ベクトル場，テンソル場，

---

[5] 次の 7-4 節で相対論的な量子場の概念を定義する．

[6] ハイゼンベルク作用素の一般概念については，新井 (1997a) の 6 章，6.6 節を参照.

スピノル場等) に応じて定まる．詳細な対応について述べることは，ここでは，割愛する．たとえば，Streater and Wightman (1964) の p.99, ボゴリューボフ他 (1972) の 3 章，§1 を参照．

(5) 容易にわかるように，自己共役作用素 H が (7.4) をみたせば，任意の実数 E に対して，(7.4) で，H を $H-E$ に置き換えた式が成り立つ．だが，$(\varphi_r)_{r=1}^s$ に対して，(7.4) をみたす自己共役作用素 H は，恒等作用素の定数倍 (定数作用素) の差を除いて一意的に決まるとは限らない．もし，自己共役作用素 H' で，$H-H'$ が定数作用素でないものがあって，(7.4) において H を H' で置き換えた式が成立するならば，$\{\mathscr{F},\mathscr{D},H',(\varphi_r)_{r=1}^s\}$ は，一般には，$\{\mathscr{F},\mathscr{D},H,(\varphi_r)_{r=1}^s\}$ とは別の量子場の理論とみなす．もちろん，これらが同値，すなわち，物理的に同一の結果をあたえる理論である場合もありうる[7)]．以下の命題 7-6 において，(7.4) をみたす H が一意的に決まるための十分条件をあたえる．

量子場のクラスのうちで，時間に関して均さなくても意味をもちうるものがありうる．これを次に定義しよう．

定義 7-3 各 $t\in\mathbb{R}$ と $r=1,\cdots,s$ に対して，$(\mathscr{F},\mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の作用素値超関数：$f\longrightarrow\varphi_r(t,f)$ $(f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ が存在して，次の性質 (i), (ii) をみたすとき，$\{\mathscr{F},\mathscr{D},H,(\varphi_r(t,\cdot))_{r=1}^s\}$ $(s\in\mathbb{N})$ を**鋭時刻量子場 (sharp-time quantum field) の理論**という：

(i) 任意の $t\in\mathbb{R}, r=1,\cdots,s, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{D}\subset D(\varphi_r(t,f))\cap D(\varphi_r(t,f)^*)$．

(ii) すべての $t\in\mathbb{R}$ と $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で

$$\varphi_r(t,f)=e^{itH/\hbar}\varphi_r(0,f)e^{-itH/\hbar}$$

が成り立つ．

$\varphi(t,f)$ を**時刻 t の量子場**，H を**ハミルトニアン**という．

鋭時刻量子場の理論 $\{\mathscr{F},\mathscr{D},H,(\varphi_r(t,\cdot))_{r=1}^s\}$ から，定義 7-2 の意味での量子場の理論をつくるには，次のような手続きをふめばよい：

(i) $\Psi,\Phi\in\mathscr{D}$ を任意に固定し，$\mathscr{S}(\mathbb{R})\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の双線形形式

$$L_{\Psi,\Phi}(g,f):=\int_{\mathbb{R}}g(t)\langle\Psi,\varphi_r(t,f)\Phi\rangle\,dt,\quad g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}),\ f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

---

7) 量子論の同値性の概念については，新井-江沢 (1999) の 3 章を参照．

が定義できることを示す (たとえば，t の関数 $\langle\Psi, \varphi_r(t,f)\Phi\rangle$ が多項式的に有界ならよい).

(ii)　$L_{\Psi,\Phi}$ が分離連続 (付録 D を参照) であることを示す．すると，シュヴァルツの核定理 (付録 D の定理 D-4) により，$\tilde{L}_{\Psi,\Phi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^\nu)$ で

$$\tilde{L}_{\Psi,\Phi}(g \times f) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\langle\Psi, \varphi_r(t,f)\Phi\rangle\, dt, \quad g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．

(iii)　$\Phi \in \mathscr{D}, F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ を任意に固定し，共役線形写像 $\Psi \longrightarrow \tilde{L}_{\Psi,\Phi}(F)$ が $\mathscr{F}$ の強位相で連続であることを示す．このとき，$\mathscr{D}$ の稠密性と Riesz の表現定理により，$\tilde{L}_{\Psi,\Phi}(F) = \langle\Psi, \Phi_F\rangle$ をみたすベクトル $\Phi_F \in \mathscr{F}$ がただ 1 つ存在する．そこで，写像 $\varphi_r(F) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{F}$ を $\varphi_r(F)\Phi := \Phi_F$ によって定義する．このとき，$\varphi_r(F)$ は，$\mathscr{D}$ を定義域とする，$\mathscr{F}$ 上の線形作用素であり，F について線形である．

(iv)　(iii) で定義される $(\varphi_r)_{r=1}^s$ がしかるべき性質をもつことを示す．

要するに，いまの手続きは，時刻 t の量子場を形式的に時間変数でならしたもの "$\int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi_r(t,f)\, dt$" に (作用素値超関数としての) 厳密な意味づけをあたえる 1 つの方法である．なお，以上の手続きはつねに可能であるとは限らない．それが可能か否かは，対象とする鋭時刻量子場の理論に依存する．

逆に，$\mathbb{R}^\nu$ 上のハミルトニアンをもつ量子場の理論 $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, H, (\varphi_r)_{r=1}^s\}$ からは，鋭時刻場を次のように定義する．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，次の性質をみたす作用素値超関数 $\varphi(t,\cdot)$ が存在するとき，これを φ に対する，時刻 t の場とよぶ：

(a)　任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 $t \longrightarrow \langle\Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle$ は連続であり，

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)||\langle\Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle|\, dt < \infty.$$

(b)　任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle\Phi, \varphi_r(g \times f)\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t)\langle\Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle\, dt.$$

なお，このような作用素値関数 $\varphi_r(t,f)$ で定義域を $\mathscr{D}$ に制限したものは，存在すればただ 1 つである．実際，(a), (b) をみたす作用素値関数 $\eta_r(t,f)$ があったとすれば ((a), (b) において，φ_r を η_r で置き換えた式が成立するということ)，任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\langle \Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle\, dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)\langle \Phi, \eta_r(t,f)\Psi\rangle\, dt.$$

条件 (a) は，t の関数 $\langle \Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle$, $\langle \Phi, \eta_r(t,f)\Psi\rangle$ が局所可積分であることを導く．したがって，du Bois-Raymond (デュボア-レイモン) の補題[8]によって，$\langle \Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle = \langle \Phi, \eta_r(t,f)\Psi\rangle$ a.e. t. 両辺の関数はともに連続であるから，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\langle \Phi, \varphi_r(t,f)\Psi\rangle = \langle \Phi, \eta_r(t,f)\Psi\rangle$ が成立することになる．これは，すべての $\Phi \in \mathscr{D}$ に対して成り立ち，$\mathscr{D}$ は稠密であるから，$\varphi_r(t,f)\Psi = \eta_r(t,f)\Psi$. ゆえに，$\varphi_r(t,f)\restriction\mathscr{D} = \eta_r(t,f)\restriction\mathscr{D}$.

量子場の理論の例は，次の 8 章で構成する．

7-3-2 量子場の方程式

定義 7-2 における量子場に対する微分方程式を導いてみよう．付録 D におけるように，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ の関数列 $\{f_n\}_n$ が，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ の位相で $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に収束することを $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ $(n \longrightarrow \infty)$ のように表す．

補題 7-4 任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$\frac{f_{(t,\mathbf{0})} - f}{t} \xrightarrow{\mathscr{S}} -\partial_0 f, \quad t \longrightarrow 0.$$

証明 部分積分により，任意の $t \in \mathbb{R}$ $(t \neq 0)$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{f_{(t,\mathbf{0})}(x) - f(x)}{t} + \partial_0 f(x) &= \frac{1}{t}\int_{x_0}^{x_0 - t} dy_0 \int_{x_0}^{y_0} dz_0\, \partial_0^2 f(z_0, \boldsymbol{x}) \\ &= \frac{1}{t}\int_0^{-t} d\xi \int_0^{\xi} d\tau\, \partial_0^2 f(x_0 + \tau, \boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

$t > 0$ と $t < 0$ の場合を分けて考察することにより，

$$\left| \frac{f_{(t,\mathbf{0})}(x) - f(x)}{t} + \partial_0 f(x) \right| \leq \frac{|t|}{2} \sup_{|\tau| \leq |t|} |\, \partial_0^2 f(x_0 + \tau, \boldsymbol{x})\,|.$$

したがって，任意の $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して，

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^\nu} \left(|x|^m \left| \frac{f_{(t,\mathbf{0})}(x) - f(x)}{t} + \partial_0 f(x) \right| \right) \leq \frac{|t|}{2} \sup_{x \in \mathbb{R}^\nu} \sup_{|\tau| \leq |t|} |x|^m |\partial_0^2 f(x_0 + \tau, \boldsymbol{x})|.$$

$|\tau| \leq |t| \leq 1$ ならば，

$$|x|^m \leq (|x_0| + |\boldsymbol{x}|)^m \leq 2^m |x_0|^m + 2^m |\boldsymbol{x}|^m$$

---

[8] たとえば，黒田 (1980) の定理 6.5.

$$\leq 2^m(|x_0+\tau|+|\tau|)^m + 2^m|\boldsymbol{x}|^m$$

$$\leq 2^{2m}|x_0+\tau|^m + 2^{2m}|\tau|^m + 2^m|\boldsymbol{x}|^m.$$

したがって，$0<|t|\leq 1$ のとき，定数 C_m が存在して，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^\nu}\sup_{|\tau|\leq|t|}|x|^m|\partial_0^2 f(x_0+\tau,\boldsymbol{x})|\leq C_m<\infty.$$

ゆえに，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^\nu}\left(|x|^m\left|\frac{f_{(t,\mathbf{0})}(x)-f(x)}{t}+\partial_0 f(x)\right|\right)\leq\frac{C_m|t|}{2}\longrightarrow 0,\quad t\longrightarrow 0.$$

同様に，いまの議論で，f のかわりに $\partial^\alpha f$ (α は任意の多重指数) を考えることにより，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^\nu}\left||x|^m\partial^\alpha\left(\frac{f_{(t,\mathbf{0})}(x)-f(x)}{t}+\partial_0 f(x)\right)\right|\longrightarrow 0,\quad t\longrightarrow 0$$

が証明される．よって，題意が成立する．□

$\mathbb{R}^\nu$ 上の作用素値超関数の，変数 x_0 に関する偏微分も D_0 と記す．

命題 7-5　$\{\mathscr{F},\mathscr{D},H,(\varphi_r)_{r=1}^s\}$ をハミルトニアンを H とする量子場の理論とする．次の条件がみたされるとする：

(i)　$\mathscr{D}\subset D(H)$.

(ii)　すべての $r=1,\cdots,s$ と $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$H\mathscr{D}\subset D(\varphi_r(f))$.

(iii)　すべての $\Psi\in\mathscr{D}$ と $r=1,\cdots,s$, $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の $\mathscr{F}$-値関数：$t\longrightarrow\varphi_r(f)e^{-itH}\Psi$ $(t\in\mathbb{R})$ は強連続である[9)].

このとき，任意の $\Psi\in\mathscr{D}$, $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $r=1,\cdots,s$, $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$D_0^n\varphi_r(f)\Psi=\frac{i}{\hbar}[H,D_0^{n-1}\varphi_r(f)]\Psi. \tag{7.6}$$

証明　まず，$n=1$ の場合を示す．任意の $\Psi,\Phi\in\mathscr{D}$, $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, に対して，

$$\langle\Phi,(D_0\varphi_r)(f)\Psi\rangle=-\langle\Phi,\varphi_r(\partial_0 f)\Psi\rangle.$$

右辺に補題 7-4 を応用すれば，

$$\langle\Phi,(D_0\varphi_r)(f)\Psi\rangle=\lim_{t\to 0}\frac{\langle\Phi,\varphi_r(f_{(t,\mathbf{0})})\Psi\rangle-\langle\Phi,\varphi_r(f)\Psi\rangle}{t}.$$

---

9) 一般に，ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ に値をとる，$\mathbb{R}$ 上の関数 — $\mathscr{X}$-値関数 — $\psi:t\longrightarrow\psi(t)\in\mathscr{X}$ $(t\in\mathbb{R})$ が**強連続** (strongly continuous) であるとは，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\psi(t+\varepsilon)-\psi(t)\|_{\mathscr{X}}=0$ が成立するときをいう．

そこで (QF.4) を使うと

$$\langle \Phi, (D_0\varphi_r)(f)\Psi \rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\langle \Phi, e^{itH/\hbar}\varphi_r(f)e^{-itH/\hbar}\Psi\rangle - \langle \Phi, \varphi_r(f)\Psi\rangle}{t}.$$

右辺を計算するために,

$$\frac{\langle \Phi, e^{itH/\hbar}\varphi_r(f)e^{-itH/\hbar}\Psi\rangle - \langle \Phi, \varphi_r(f)\Psi\rangle}{t}$$
$$= \left\langle \frac{e^{-itH/\hbar}-1}{t}\Phi, \varphi_r(f)e^{-itH/\hbar}\Psi \right\rangle + \left\langle \varphi_r(f)^*\Phi, \frac{e^{-itH/\hbar}-1}{t}\Psi \right\rangle$$

と変形し, 任意の $\Xi \in D(H)$ に対して,

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-itH/\hbar}-1}{t}\Xi = -\frac{i}{\hbar}H\Xi$$

が成り立つこと[10]および仮定 (iii) から導かれる性質

$$\lim_{t\to 0} \varphi_r(f)e^{-itH/\hbar}\Psi = \varphi_r(f)\Psi$$

を用いると

$$\langle \Phi, (D_0\varphi_r)(f)\Psi \rangle = \left\langle \Phi, \frac{i}{\hbar}[H, \varphi_r(f)]\Psi \right\rangle$$

が得られる. これと $\mathscr{D}$ の稠密性により, $n=1$ の場合の (7.6) がしたがう.

一般の n の場合は帰納法による. (7.6) が $n=k$ の場合に成立したとする. このとき,

$$D_0^{k+1}\varphi_r(f) = -D_0^k\varphi_r(D_0 f) = -\frac{i}{\hbar}[H, D_0^k\varphi_r(D_0 f)] = \frac{i}{\hbar}[H, D_0^{k+1}\varphi_r(f)].$$

したがって, $n=k+1$ の場合も (7.6) が成立する. □

微分方程式 (7.6) は, 具体的なモデルにおいては, 量子場したがう微分方程式, すなわち, 量子場の方程式をあたえる.

7-3-3 ハミルトニアンの一意性

上述の注意 (5) でふれた一意性の問題に対する 1 つの解答を定式化する.

命題 7-6 $\mathscr{F}$ をヒルベルト空間, $\mathscr{D}$ を $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間とする. $(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く作用素値超関数の組 $\{\varphi_r(f), \varphi_r(f)^* \mid f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), r=1,\cdots,s\}$ は $\mathscr{D}$ 上で既約であるとする[11]. このとき, $\mathscr{D}$ 上で (7.4) をみたす自己共役作用素 H で, 任意の $t \in \mathbb{R}$

---

[10] 新井 (1997a) の定理 4.4 (ii).

[11] 既約性の概念については, 4 章, 4-3 節, 4-3-3 項を参照.

に対して，$e^{itH}\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ をみたすものは，存在すれば，定数作用素の差を除いて，ただ 1 つである．

証明　2 つの自己共役作用素 H, H' があって，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$, $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $r = 1, \cdots, s$ に対して，$e^{itH}\varphi_r(f)e^{-itH}\Psi = e^{itH'}\varphi_r(f)e^{-itH'}\Psi$ をみたすとしよう ($t/\hbar$ をあらためて t とした)．また，$e^{itH}\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$, $e^{itH'}\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$ を仮定する．$\varphi_r(f)e^{-itH}\Psi = e^{-itH}e^{itH'}\varphi_r(f)e^{-itH'}\Psi$．任意の $\Phi \in \mathscr{D}$ に対して，$\Psi = e^{itH'}\Phi \in \mathscr{D}$ であるから，これを上の式に代入し，$T(t) = e^{-itH}e^{itH'}$ とおけば，$\varphi_r(f)T(t)\Phi = T(t)\varphi_r(f)\Phi$．したがって，既約性により，定数 $c(t)$ があって，$T(t) = c(t)I$．$T(t)$ はユニタリであるから，$|c(t)| = 1$．また，

$$c(t+t')I = T(t+t') = e^{-itH}T(t')e^{itH'} = c(t)c(t')I$$

となる．$T(t)$ は，t について強連続であるから，$c(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．よって，定数 $E \in \mathbb{R}$ が存在して，$c(t) = e^{iEt}$ と表される (問題 1)．これは，$e^{itH'} = e^{it(H+E)}$ をあたえるから，$H' = H + E$ である．ゆえに題意が成立する．　□

7-3-4　真空期待値

$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, H, (\varphi_r)_{r=1}^s\}$ をハミルトニアン H をもつ量子場の理論とし，H が下に有界の場合を考えよう．この場合，H のスペクトルの下限

$$E_0(H) := \inf \sigma(H) > -\infty \tag{7.7}$$

を H の**最低エネルギー** (lowest energy) という．

$E_0(H)$ が H の固有値であるとき，その固有空間 $\ker(H - E_0(H))$ の零でないベクトルを**基底状態** (ground state) あるいは**真空** (vacuum) とよぶ．この場合，$\dim\ker(H - E_0(H)) = 1$ のとき，基底状態は**一意的** (unique) であるという．他方，$\dim\ker(H - E_0(H)) \geq 2$ のときは，基底状態は**縮退**しているという．

$E_0(H)$ が H の固有値でないときは，H の基底状態は存在しないという．

注意 7-2　通常，$E_0(H)$ は**基底状態エネルギー** (ground state energy) とよばれる場合が多い．だが，$E_0(H)$ は，基底状態が存在しない場合でも定義できる量であるから，この名称はあまり適切でないように思われる．量子場の理論における基底状態の存在は全然自明ではない．それどころか，基底状態の存在あるいは非存在を証明する問題は，量子場の数理物理学における中心的課題の 1 つなのである．この問題については，後の章でまたふれる．

真空が存在する場合を考え，条件

(QF.5)　$\ker(H - E_0(H)) \subset \mathscr{D}$

がみたされるとしよう．この特性は，真空をもつ量子場の理論の多くにおいてみたされるのが普通である．このとき，任意の $\Psi_0 \in \ker(H - E_0(H))$ に対して，(QF.3) によって，

$$E_{r_1\cdots r_n}(f_1, \cdots, f_n) := \langle \Psi_0, \varphi_{r_1}(f_1)\cdots\varphi_{r_n}(f_n)\Psi_0\rangle$$

$(r_j = 1, \cdots, s,\ n \in \{0\}\cup\mathbb{N},\ f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu))$ という量が定義される．この形の量を量子場の **(n 点) 真空期待値** (vacuum expectation value) とよぶ．

$E_{r_1\cdots r_n}$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)\times\cdots\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ 上の n 重双線形形式である．対応 $f \longrightarrow \varphi_r(f)$ の (作用素値超関数の意味での) 連続性により，$E_{r_1\cdots r_n}(f_1, \cdots, f_n)$ は各変数 f_j について，連続である．つまり，$E_{r_1\cdots r_n}$ は分離連続である．したがって，シュヴァルツの核定理 (付録 D の定理 D-4 を参照) により，$\mathbb{R}^{\nu n} = (\mathbb{R}^\nu)^n$ ($\mathbb{R}^\nu$ の n 個の直積) 上の緩増加超関数，すなわち，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\nu n})$ の元 $W_{r_1\cdots r_n}$ で，

$$W_{r_1\cdots r_n}(f_1\times\cdots\times f_n) = \langle \Psi_0, \varphi_{r_1}(f_1)\cdots\varphi_{r_n}(f_n)\Psi_0\rangle \tag{7.8}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．この種の超関数は，**(n 点) Wightman (ワイトマン) 超関数**とよばれる．詳細は，物理の文献に譲るが，Wightman 超関数を解析することで，量子場の理論の諸々の物理的性質が引き出されうることを発見法的に示すことができる[12]．

7-3-5　並進共変な量子場の理論

$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, H, (\varphi_r)_{r=1}^s\}$ をハミルトニアン H をもつ量子場の理論とする．$\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素 P_j $(j = 1, \cdots, d)$ で次の性質をもつものがあるとする：

(i)　自己共役作用素の組 $\{H, P_1, \cdots, P_d\}$ は強可換である[13]．

(ii)　任意の $a \in \mathbb{R}^\nu$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $r = 1, \cdots, s$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で，

$$\varphi_r(f_a) = e^{ia_0H/\hbar}e^{-ia_1P_1/\hbar}\cdots e^{-ia_dP_d/\hbar}\varphi_r(f)e^{-ia_0H/\hbar}e^{ia_1P_1/\hbar}\cdots e^{ia_dP_d/\hbar}. \tag{7.9a}$$

このとき，この量子場の理論は**並進共変**であるという．d 個の自己共役作用素の組 $\boldsymbol{P} :=$

---

[12] たとえば，素粒子の散乱現象を記述する，散乱行列 — S 行列 — は，Wightman 超関数を用いて表示される．

[13] 強可換性の概念については，2 章，2-3 節を参照．

$(P_1, \cdots, P_d)$ を**量子場の運動量作用素**とよび，これとハミルトニアンの組 $(H, \boldsymbol{P})$ を**エネルギー・運動量作用素**という．並進共変な量子場の理論を $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, (H, \boldsymbol{P}), (\varphi_r)_{r=1}^s\}$ と表す．

鋭時刻量子場の理論についても同様の概念が定義される．すなわち，鋭時刻量子場の理論 $\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, H, (\varphi_r(t, \cdot))_{r=1}^s\}$ において，$\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素 P_j $(j = 1, \cdots, d)$ で上記 (i) と

(ii)′　任意の $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $r = 1, \cdots, s$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で,

$$\varphi_r(t, f_{(0,\boldsymbol{a})}) = e^{itH/\hbar} e^{-ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{-ia_d P_d/\hbar} \varphi_r(f) e^{-itH/\hbar} e^{ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{ia_d P_d/\hbar}$$

をみたすものが存在するとき，この鋭時刻量子場の理論は**並進共変**であるという．この場合にも，$\boldsymbol{P}$, $(H, \boldsymbol{P})$ をそれぞれ，量子場の運動量作用素，エネルギー・運動量作用素とよぶ．

注意 7-3　上記の条件 (i) により，$(e^{ia_0 H}, e^{ia_1 P_1}, \cdots, e^{ia_d P_d})$ は可換なユニタリ作用素の組であるから，(7.9a) において，指数作用素の積の順序は任意でよい．

$$P_0 := H, \quad P := (P_0, P_1, \cdots, P_d)$$

とおくと，定理 2-18 の応用により，$a_0 P_0 - \sum_{j=1}^d a_j P_j$ は本質的に自己共役であり，

$$aP := \overline{a_0 P_0 - \sum_{j=1}^d a_j P_j}$$

とすれば，作用素解析により，

$$e^{iaP/\hbar} = e^{itH/\hbar} e^{-ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{-ia_d P_d/\hbar}$$

が成り立つ．したがって，(7.9a) は，

$$\varphi_r(f_a) = e^{iaP/\hbar} \varphi_r(f) e^{-iaP/\hbar} \tag{7.9b}$$

とも書ける．

並進共変な量子場の理論におけるエネルギー・運動量作用素 $(H, \boldsymbol{P})$ は強可換であるから，その結合スペクトル $\sigma_{\mathrm{J}}(H, \boldsymbol{P})$ が定義される (2 章，2-3 節，2-3-2 項を参照)．これを**エネルギー・運動量スペクトル** (energy-momentum spectrum) という．これは並進共変な量子場の理論を特徴づける重要な量の 1 つである．

時空間としての $\mathbb{R}^\nu = \{x = (x_0, \boldsymbol{x}) \,|\, x^0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d\}$ の双対空間

$$\mathbb{R}_p^\nu := \{p = (p_0, \boldsymbol{p}) \,|\, p_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d\} \tag{7.10}$$

を (古典的な意味での) **エネルギー・運動量空間**とよぶ．この場合，p_0 がエネルギー座標，$\boldsymbol{p}$ が運動量座標を表す．上述のエネルギー・運動量スペクトルは，物理的には，$\mathbb{R}_p^\nu$ の部分集合であると解釈される．

並進共変な量子場の理論においては，ハミルトニアンと運動量作用素の固有値の関係も重要である．この点を調べるために．次の補題に注意する．

補題 7-7 $\mathscr{X}$ をヒルベルト空間，A, B を $\mathscr{X}$ 上の強可換な自己共役作用素とする．いま，$\sigma_{\mathrm{p}}(A) \neq \emptyset$ とし，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\mathscr{M} := \ker(A - \lambda)$ (固有値 λ に属する A の固有空間) とおく．このとき：

(i) $\mathscr{M}$ は B を簡約する．

(ii) $m := \dim \mathscr{M} < \infty$ ならば，$\mathscr{M}$ の CONS $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ で，各 ψ_j は B の固有ベクトルであるものが存在する．

証明 (i) A, B の強可換性により，$e^{itA}e^{isB} = e^{isB}e^{itA}$ $(s, t \in \mathbb{R})$．したがって，任意の $\psi \in D(A)$ に対して，

$$e^{itA}e^{isB}\psi = e^{isB}e^{itA}\psi.$$

これから，$t \neq 0$ として，

$$\frac{e^{itA} - 1}{t}e^{isB}\psi = e^{isB}\frac{e^{itA} - 1}{t}\psi$$

が導かれる．$(e^{itA} - 1)\psi/t \longrightarrow iA\psi$ $(t \longrightarrow 0)$ であり，e^{isB} は有界であるから，右辺は，$t \longrightarrow 0$ のとき，$e^{isB}iA\psi$ に収束する．したがって，

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{itA} - 1}{t}e^{isB}\psi = ie^{isB}A\psi.$$

ゆえに，$e^{isB}\psi \in D(A)$ であって[14)]，

$$Ae^{isB}\psi = e^{isB}A\psi, \quad \psi \in D(A),$$

が得られる．そこで，特に，$\psi \in \mathscr{M}$ とすれば，$Ae^{isB}\psi = \lambda e^{isB}\psi$ がでる．これは，$e^{isB}\psi \in \mathscr{M}$ を意味する．したがって，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，e^{isB} は $\mathscr{M}$ を不変にする．任意の $\psi \in \mathscr{M}$ に対して，$\psi = e^{isB}\chi$ $(\chi = e^{-isB}\psi \in \mathscr{M})$ と書けるから，$e^{isB}\mathscr{M} = \mathscr{M}$ である．つまり，e^{isB} は，$\mathscr{M}$ から $\mathscr{M}$ へのユニタリ作用素である．任

[14)] 新井 (1997a) の定理 4.4 (iii) の応用．

意の $\eta \in \mathscr{M}^\perp$ と $\psi \in \mathscr{M}$ に対して，$\langle e^{isB}\eta, \psi\rangle = \langle \eta, e^{-isB}\psi\rangle = 0$ であるから，e^{isB} は $\mathscr{M}^\perp$ も不変にし，したがって，$\mathscr{M}^\perp$ 上のユニタリでもある．P を $\mathscr{M}$ 上の正射影作用素とすれば，いま述べた性質から，

$$Pe^{isB}(1-P) = 0, \quad Pe^{isB}P = e^{isB}P.$$

したがって，任意の $\phi \in D(B)$ に対して，

$$Pe^{isB}\phi = Pe^{isB}(P\phi + (1-P)\phi) = Pe^{isB}P\phi = e^{isB}P\phi.$$

すなわち，$Pe^{isB}\phi = e^{isB}P\phi$．両辺の $s=0$ での微分を考えることにより，上の議論と同様にして，$P\phi \in D(B)$ かつ $BP\phi = PB\phi$ が成り立つ．つまり，$PB \subset BP$ である．ゆえに，$\mathscr{M}$ は B を簡約する．

(ii) B の $\mathscr{M}$ における簡約部分を $B_{\mathscr{M}}$ とする．いま，仮定により，$\mathscr{M}$ は m 次元ヒルベルト空間であるから，$B_{\mathscr{M}}$ のスペクトルは，固有値のみからなり[15]，$B_{\mathscr{M}}$ の自己共役性により，$B_{\mathscr{M}}$ の固有ベクトルからなる CONS $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ が存在する．□

注意 7-4　上の補題の (ii) の各ベクトル ψ_j は，A と B の同時固有ベクトルである[16]：$A\psi_j = \lambda\psi_j, B\psi_j = \mu_j\psi_j$ (μ_j は $B_{\mathscr{M}}$ の 1 つの固有値)．

命題 7-8　$\{\mathscr{F}, \mathscr{D}, (H, \boldsymbol{P}), (\varphi_r)_{r=1}^s\}$ を並進共変な量子場の理論とする．H は下に有界で，基底状態 Ψ_0 をもち，しかも，基底状態は，Ψ_0 の定数倍を除いて，ただ 1 つ，すなわち，基底状態は一意的であると仮定する．このとき，Ψ_0 は，各 P_j $(j=1,\cdots,d)$ の固有ベクトルである．

証明　補題 7-7 によって，$P_j\Psi_j = \mu_j\Psi_j$ となる $\Psi_j \in \ker(H - E_0(H)) \setminus \{0\}$ と $\mu_j \in \mathbb{R}$ が存在する．仮定により，$\dim\ker(H - E_0(H)) = 1$ であるから，$\Psi_j = c_j\Psi_0$ となる定数 $c_j \neq 0$ がある．したがって，題意が成立する．□

---

[15] 新井 (1997a) の p.88，例 2.25 を参照．

[16] 1 つのベクトルが，複数の線形作用素の固有ベクトルであるとき，このベクトルをこれらの作用素の**同時固有ベクトル**という．

7-4 節　相対論的量子場

古典場の理論に相対論的なものとそうでないものがあるように，量子場の理論についてもこの種の分類が可能である．この節では，相対論的共変性をもつ量子場の理論を定義する．準備として，まず，相対性理論における基本的変換である Lorentz (ローレンツ) 変換について復習する．

7-4-1　Lorentz 変換

相対性理論が関わる時空は $\nu = 1 + d$ 次元ミンコフスキー空間

$$\mathbb{M}^\nu := \{x = (x^0, x^1, \cdots, x^d) = (x^0, \boldsymbol{x}) \,|\, x^\mu \in \mathbb{R}, \, \mu = 0, \cdots, d\} \tag{7.11}$$

である[17]．この空間の計量は

$$xy := x^0 y^0 - \sum_{j=1}^{d} x^j y^j \tag{7.12}$$

によって定義される不定内積 (ミンコフスキー内積) によってあたえられる．したがって，ν 次の行列 $g = (g_{\mu\lambda})_{\mu,\lambda=0,1\cdots,d}$ を

$$g_{00} = 1, \quad g_{jj} = -1, \quad j = 1, \cdots, d, \tag{7.13a}$$

$$g_{\mu\lambda} = 0, \quad \mu \neq \lambda, \tag{7.13b}$$

によって定義すれば，

$$xy = g_{\mu\lambda} x^\mu x^\lambda$$

と書ける．ただし，下付きと上付きの同一のギリシャ文字については，0 から d までの和をとるものとする (Einstein の規約)．したがって，g は $\mathbb{M}^\nu$ の計量テンソルをあたえる．計量テンソルを用いて，下付きの添字をもつ変数 x_μ を

$$x_\mu := g_{\mu\lambda} x^\lambda \tag{7.14}$$

によって定義すれば，

$$xy = x_\mu y^\mu$$

とも表示できる．x^2 を

---

[17] 本書では，特に，断らない限り，真空中の光速 $c = 1$ の単位系を用いる．

$$x^2 := xx \ (= x_\mu x^\mu) \tag{7.15}$$

によって定義する．

$x^2 > 0$ のとき，x は**時間的** (time-like)，$x^2 < 0$ のとき，x は**空間的** (space-like) とよばれる．

$x^2 = 0$ となる点の集合 $\{x \in \mathbb{M}^\nu \mid x^2 = 0\}$ を**光円錐** (light cone) という．

$\mathbb{M}^\nu$ の不定内積を不変にする，$\mathbb{M}^\nu$ 上の正則な線形変換を **Lorentz 変換**という．Lorentz 変換の全体は群を形成し，この群は**一般 Lorentz 群**とよばれる．この群の任意の要素 Λ は，行列形で書けば，

$$^t\Lambda g \Lambda = g \tag{7.16}$$

をみたす行列として特徴づけられる ($^t\Lambda$ は Λ の転置行列を表す)．一般 Lorentz 群は 4 個の連結成分に分解され，そのうちの 1 つ

$$\mathscr{L}_+^\uparrow := \{\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\lambda)_{\mu,\lambda=0,\cdots,d} : \text{Lorentz 変換} \mid \det \Lambda = 1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\} \tag{7.17}$$

は部分群をなす[18]．これを**固有 Lorentz 群** (proper Lorentz group) といい，その要素を**固有 Lorentz 変換**とよぶ．本書では，以下，固有 Lorentz 変換を単に Lorentz 変換という．

$\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ と $a \in \mathbb{R}^\nu$ の対 (a, Λ) の全体

$$\mathscr{P}_+^\uparrow = \{(a, \Lambda) \mid a \in \mathbb{R}^\nu,\ \Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow\} \tag{7.18}$$

は，

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) := (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \tag{7.19}$$

によって定義される積について群をなす．この群を**固有 Poincaré 群**とよぶ．これは，$\mathbb{M}^\nu$ 上への自然な作用 $(a, \Lambda)x = \Lambda x + a$ $(x \in \mathbb{M}^\nu)$ から定まる，$\mathbb{M}^\nu$ 上の変換群である．

固有 Lorentz 群は，固有 Poincaré 群の部分群とみることができる．

7-4-2　位相群のユニタリ表現

一般に，物理系が何らかの対称性 — 1 つまたはいくつかの操作のもとで不変な性質 — を有する場合，この対称性は群とよばれる概念によって表される．量子系における対称性は，以下に述べる，群のユニタリ表現という形式をとって現われる．

---

[18] 山内-杉浦 (1960) の IV 章を参照.

G を群とする．G が位相空間であり，直積位相空間 $G \times G$ から G への写像：$(h, g) \longrightarrow hg$ $(h,\ g \in G)$ および G から G への写像：$g \longrightarrow g^{-1}$ (g の逆元) がともに連続であるとき，G は**位相群**とよばれる[19]

ν 次元並進群 $\mathbb{R}^\nu$ や固有 Poincaré 群は位相群の例である[20]．

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とし，$\mathscr{H}$ 上のユニタリ作用素の全体を $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ と記す．このとき，$\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ は，作用素ノルムの位相で位相群である．実際，任意の $U, V \in \mathfrak{U}(\mathscr{H})$ に対して，UV も U^{-1} もユニタリであるから，$UV, U^{-1} \in \mathfrak{U}(\mathscr{H})$．さらに，任意の $U, V, U', V' \in \mathfrak{U}(\mathscr{H})$ に対して，

$$\begin{aligned}\|UV - U'V'\| &= \|U(V - V') + (U - U')V'\| \\ &\leq \|U\|\|V - V'\| + \|U - U'\|\|V'\| \\ &= \|V - V'\| + \|U - U'\|\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\|U^{-1} - U'^{-1}\| &= \|U^{-1}(U' - U)U'^{-1}\| \\ &\leq \|U' - U\|\end{aligned}$$

であることを用いれば，写像：$(U, V) \longrightarrow UV$ と $U \longrightarrow U^{-1}$ が，作用素ノルム (一様位相) で連続であることが示される．

ここで，位相空間からヒルベルト空間上の有界線形作用素の空間への写像の連続性の概念を定義しておく．

定義 7-9 X を位相空間，T を X から $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ ($\mathscr{H}$ 上の有界線形作用素の全体) への写像とする．

(i) 任意の $\psi \in \mathscr{H}$ に対して，X から $\mathscr{H}$ への写像：$x \longrightarrow T(x)\psi$ $(x \in X)$ が $\mathscr{H}$ の強位相 ($\mathscr{H}$ のノルムによる通常の位相) で連続のとき，T は**強連続** (strongly continuous) であるという．すなわち，T が強連続であるとは，各 $x \in X$ と $\psi \in \mathscr{H}$ ごとに，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\{y \in X \mid \|T(x)\psi - T(y)\psi\| < \varepsilon\}$ が x の基本近傍を含むことである．

---

[19] 位相空間論の基礎的事項については，たとえば，竹之内 (1962) を参照．位相群については，名著：ポントリャーギン (1957), (1958) がある．だが，本書を読むには，さしあたり，位相群についての詳しい知識は必要ではない．

[20] 並進群としての $\mathbb{R}^\nu$ の位相は，ユークリッド空間としての $\mathbb{R}^\nu$ の位相であり，$\mathscr{P}_+^\uparrow$ の位相は，$(a_n, \Lambda_n) \longrightarrow (a, \Lambda)$ $(n \longrightarrow \infty) \Longleftrightarrow |a_n - a| \longrightarrow 0$, $(\Lambda_n)^\mu{}_\lambda \longrightarrow \Lambda^\mu{}_\lambda$ $(n \longrightarrow \infty)$ $(\mu, \lambda = 0, \cdots, d)$ によって定義される．

(ii)　任意の $\psi, \phi \in \mathscr{H}$ に対して，X 上の複素数値関数：$x \longrightarrow \langle \phi, T(x)\psi \rangle$ が連続であるとき，T は**弱連続** (weakly continuous) であるという．

G を位相群とする．G から $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ への写像 $U : G \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathscr{H})$ $(G \ni g \longrightarrow U(g) \in \mathfrak{U}(\mathscr{H}))$ が次の性質をみたすとき，U あるいは $\{U(g)\}_{g\in G}$ を G の，$\mathscr{H}$ における**ユニタリ表現** (unitary representation) という：

(U.1)(準同型性)　任意の $g, h \in G$ に対して，$U(gh) = U(g)U(h)$.

(U.2)(強連続性)　任意の $\psi \in \mathscr{H}$ に対して，G 上の $\mathscr{H}$-値関数：$g \longrightarrow U(g)\psi$ は強連続である．

この場合，$\mathscr{H}$ を U の**表現空間** (representation space) という．

次の事実は，応用上，有用である．

補題 7-10　X を位相空間，u を X から $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ への弱連続な写像とすれば，u は強連続である．

証明　$\psi \in \mathscr{H}$ を任意に固定し，$f(x) = u(x)\psi$ とおく $(f : X \longrightarrow \mathscr{H})$．$u$ の強連続性を証明するには，f の強連続性を証明すればよい．すなわち，$\mathscr{H}$ の任意の開集合 D に対して，$f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$ が X の開集合であることを示せばよい．$a \in f^{-1}(D)$ を任意にとる．このとき，$f(a) \in D$ であり，D は開集合であるから，ある正数 δ が存在して，$U_\delta := \{\phi \in \mathscr{H} \mid \|f(a) - \phi\| < \delta\}$ は D に含まれる．$u(\cdot)$ はユニタリであるから，

$$\| f(a) - f(x) \|^2 = 2\|\psi\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle u(a)\psi, u(x)\psi \rangle.$$

そこで，$g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) := 2\mathrm{Re}\,\langle u(a)\psi, u(x)\psi \rangle$ によって定義すれば，$g(a) = 2\|\psi\|^2$ であるから，

$$\|f(a) - f(x)\|^2 = g(a) - g(x).$$

仮定により，g は連続である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$W_\varepsilon \subset \{x \in X \mid |g(x) - g(a)| < \varepsilon\}$$

となる，a の基本近傍 W_ε が存在する．そこで，$\varepsilon = \delta^2$ の場合を考えると，$x \in W_{\delta^2}$ ならば $\|f(a) - f(x)\| < \delta$ が成立する．したがって，$W_{\delta^2} \subset f^{-1}(U_\delta)$．他方，$f^{-1}(U_\delta) \subset f^{-1}(D)$ は明らかであるから，$W_{\delta^2} \subset f^{-1}(D)$．$a \in W_{\delta^2}$ であるから，W_{δ^2} は a の基本近傍である．ゆえに，$f^{-1}(D)$ は開集合である[21]．　□

---

[21] 竹之内 (1962) の定理 18.3 の応用．

補題 7-10 はもう少し使いやすい形にできる：

補題 7-11 X を位相空間，u を X から $\mathfrak{U}(\mathscr{H})$ への写像，D を $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間とする．もし，任意の $\psi, \phi \in D$ に対して，X 上の関数：$x \longrightarrow \langle \phi, u(x)\psi \rangle$ が連続であるならば，u は強連続である．

証明 補題 7-10 によって，u の弱連続性を示せばよい．任意の $\psi, \phi \in \mathscr{H}$ に対して，$F(x) = \langle \psi, u(x)\phi \rangle$ とおく．D の稠密性により，$\psi_n \longrightarrow \psi$, $\phi_n \longrightarrow \phi$ $(n \longrightarrow \infty)$ となる $\psi_n, \phi_n \in D$ がある．そこで，$F_n(x) = \langle \psi_n, u(x)\phi_n \rangle$ とおけば，

$$|F_n(x) - F(x)| = |\langle \psi_n - \psi, u(x)\phi_n \rangle + \langle \psi, u(x)(\phi_n - \phi) \rangle|$$
$$\leq \|\psi_n - \psi\|C + \|\psi\|\|\phi_n - \phi\|.$$

ここで，$C := \sup_{n \geq 1} \|\phi_n\| < \infty$ である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$\|\psi_n - \psi\|C + \|\psi\|\|\phi_n - \phi\| < \varepsilon$ が成立する．したがって，

$$\sup_{x \in X} |F_n(x) - F(x)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

さて，$x \in X$ を任意に固定する．任意の $y \in X$ に対して，

$$|F(x) - F(y)| = |[F(x) - F_{n_0}(x)] + [F_{n_0}(x) - F_{n_0}(y)] + [F_{n_0}(y) - F(y)]|$$
$$\leq |F(x) - F_{n_0}(x)| + |F_{n_0}(x) - F_{n_0}(y)| + |F_{n_0}(y) - F(y)|$$
$$\leq 2\varepsilon + |F_{n_0}(x) - F_{n_0}(y)|.$$

関数 F_{n_0} は連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$V_\varepsilon \subset \{y \in X \,|\, |F_{n_0}(x) - F_{n_0}(y)| < \varepsilon\}$$

となる基本近傍 V_ε がある．したがって，任意の $y \in V_\varepsilon$ に対して，$|F(x) - F(y)| < 3\varepsilon$ が成立する．ゆえに，$V_\varepsilon \subset \{y \in X \,|\, |F(x) - F(y)| < 3\varepsilon\}$．$\varepsilon > 0$ は任意であったから，これは，F が点 x で連続であることを意味する．□

例 7-4 任意の $a \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^\nu)$ 上の写像 $u(a)$ を

$$u(a)f = f_a, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$$

によって定義する．ここで，f_a は (7.3a) で定義される関数である[22)]．$u(a)$ が線形でユニタリであること，また，

$$u(a+b) = u(a)u(b) = u(b)u(a)$$

が成立することは容易にわかる．u の強連続性を示そう．そのために，補題 7-11 を利用する．$g, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ とすれば，$K := \operatorname{supp} g$ は有界閉集合であり，

$$\langle g, u(a)f\rangle = \int_K g(x)^* f(x-a)\, dx$$

任意の $x \in K$ に対して，$|g(x)^* f(x-a)| \le \left(\sup_{x\in K} |g(x)|\right)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^\nu} |f(x)|\right) < \infty$ であり，$\lim_{a\to b} g(x)^* f(x-a) = g(x)^* f(x-b)$ $(b \in \mathbb{R}^\nu)$ であるから，ルベーグの優収束定理が応用できて，

$$\lim_{a\to b}\langle g, u(a)f\rangle = \int_K g(x)^* f(x-b)\, dx = \langle g, u(b)f\rangle.$$

したがって，関数：$a \longrightarrow \langle g, u(a)f\rangle$ は連続である．$C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu)$ は $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ で稠密であるから，補題 7-11 によって，u は強連続である．以上から，$\{u(a)\}_{a\in\mathbb{R}^\nu}$ は ν 次元並進群 $\mathbb{R}^\nu$ の，$L^2(\mathbb{R}^\nu)$ におけるユニタリ表現である．

7-4-3 相対論的場の量子論の公理系

7-3 節で定義した並進共変的な量子場の理論のうちで，相対性理論の基本原理を量子力学的に表現する構造を有しているものが相対論的場の量子論である．相対性理論の基本原理は次の 2 つである[23)]：

(R.1) 光速度不変の原理 (因果律),

(R.2) Poincaré 共変性 (特殊相対性原理).

これらの原理を量子場の理論の中に，“しかるべく” 組み入れることにより，相対論的な場の量子論の公理系が設定される．これまでに知られている標準的な公理系は 4 つあり，それぞれ，Gårding (ゴルディング)-Wightman, Wightman, Osterwalder-Schrader (オスターヴァルダー・シュラーダー), Nelson (ネルソン) の名を冠して呼ばれている．

[22)] (7.3a) では，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ であったが，$f \in L^2(\mathbb{R}^\nu)$ に対しても，全く同じに定義される．$f(x) = g(x)$ a.e.x ならば $f_a(x) = g_a(x)$ a.e.x であるから (ルベーグ測度の平行移動不変性により，零集合を a だけ平行移動した集合も零集合であることに注意)，$u(a)$ は $L^2(\mathbb{R}^\nu)$ 上の写像として意味をもつ (well-defined).

[23)] たとえば，Schutz(1985) を参照.

はじめの 2 つは，ミンコフスキー空間上の相対論的量子場の理論が最小限みたすべき性質を定式化したものであり，あとの 2 つは，ミンコフスキー空間の時間成分を虚数時間まで解析接続することにより，相対論的量子場の理論をユークリッド空間上の場の理論として定式化したものである．

Gårding-Wightman の公理系　この公理系は，歴史的には，Wightman and Gårding (1965) において提出された．簡単のため，ν 次元時空上の，スピン 0 の中性スカラー場とよばれる量子場の理論に対する公理系について叙述する[24]．

スピン 0 の相対論的中性スカラー場の量子論とは以下の (GW.1)~ (GW.5) をみたす 5 つ組 $\{\mathscr{H}, U, \phi, \mathscr{D}, \Omega\}$ である[25]．ϕ を**中性スカラー場**，Ω を**真空**という

(GW.1)　$\mathscr{H}$ は可分なヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ は $\mathscr{H}$ の稠密な部分空間，ϕ は $(\mathscr{H}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathbb{R}^\nu$ 上の作用素値超関数で次の性質をみたす．

(a)　各 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\phi(f)$ は $\mathscr{D}$ を不変にする．

(b)(場の対称性)　$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ が実数値ならば，$\phi(f) \restriction \mathscr{D}$ は対称作用素である．

(c)(真空の巡回性)　Ω は $\mathscr{D}$ に属する単位ベクトルであり，

$$\mathscr{D} = \mathscr{L}\{\Omega,\, \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega \mid f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu),\, n \geq 1\}.$$

(GW.2)(相対論的共変性)　$\mathscr{H}$ 上に，固有 Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^\uparrow$ のユニタリ表現 U : $(a, \Lambda) \longrightarrow U(a, \Lambda)$　$((a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow)$ が存在して，以下の性質をみたす：

(U.1)　任意の $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，$U(a, \Lambda)\mathscr{D} \subset \mathscr{D}$.

(U.2)　すべての $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して

$$U(a, \Lambda)\Omega = \Omega.$$

(U.3)　任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ とすべての $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で

$$U(a, \Lambda)\phi(f)U(a, \Lambda)^{-1} = \phi(f_{(a,\Lambda)})$$

が成り立つ．ただし，

$$f_{(a,\Lambda)}(x) := f(\Lambda^{-1}(x - a)). \tag{7.20}$$

* * * * *

---

[24] もっと一般の相対論的量子場の公理系については，ボゴリューボフ他 (1972) の 3 章を参照．

[25] これらの言明の "意味" については，すぐあとで簡単にふれる．"スピン" については，4 章のはじめを参照．

残りの公理 (GW.3)〜(GW.5) を述べる前に，(GW.2) の 1 つの帰結を見ておく．(GW.2) によって，$\{U(a,I)\,|\,a\in\mathbb{R}^\nu\}$ は $\mathbb{R}^\nu$ のユニタリ表現である．$\{e_\mu\}_{\mu=0}^d$ を $\mathbb{R}^\nu$ の標準基底としよう．すなわち，e_μ は $\mathbb{R}^\nu$ の元で，その λ 成分 $(e_\mu)_\lambda$ が $\delta_{\mu\lambda}$ によってあたえられるものである．したがって，$a=\sum_{\mu=0}^{d}a^\mu e_\mu$ と書かれる $(a=(a^0,a^1,\cdots,a^d))$．ゆえに，

$$U(a,I)=U(a^0e_0,I)\cdots U(a^de_d,I).$$

並進群 $\mathbb{R}^\nu$ は可換であるから，右辺の因子の積の順序は任意でよい．すなわち，$\{U(a^\mu e_\mu,I)\,|\,a_\mu\in\mathbb{R},\,\mu=0,\cdots,d\}$ は可換なユニタリ作用素の集合である．ユニタリ表現の強連続性により，各 μ に対して，$\{U(te_\mu,I)\}_{t\in\mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメータ群を形成する．したがって，Stone の定理[26]によって，

$$U(te_\mu,I)=e^{itP_\mu/\hbar},\quad t\in\mathbb{R},\tag{7.21a}$$

をみたす自己共役作用素 P^μ がただ 1 つ存在する．$\{U(a^\mu e_\mu,I)\,|\,a_\mu\in\mathbb{R},\,\mu=0,\cdots,d\}$ の可換性により，自己共役作用素の組 $(P_0,P_1,\cdots,P_d)$ は強可換である[27]．つまり，いま考えている量子場の理論は，前節の 7-3-5 項で述べた並進共変な量子場の理論のクラスに属する．そこで，P_0 をハミルトニアン，$\boldsymbol{P}=(P_1,\cdots P_d)$ を**運動量作用素**とよぶ．これらの作用素の組 $P:=(P_0,\boldsymbol{P})$ を**エネルギー・運動量作用素**とよぶ．任意の $a\in\mathbb{R}^\nu$ に対して，

$$U(a,I)=e^{iaP/\hbar}\tag{7.21b}$$

が成立することになる．ただし，$aP:=\overline{a^\mu P_\mu}$．

(GW.2) の (U.2) によって，任意の $t\in\mathbb{R}$ と $\mu=0,\cdots,d$ に対して，

$$e^{itP_\mu/\hbar}\Omega=\Omega.$$

したがって，t に関する微分を考えることにより，$\Omega\in D(P^\mu)$ かつ

$$P_\mu\Omega=0$$

であることがわかる．すなわち，Ω は，ハミルトニアンと運動量作用素の，固有値 0 に属する，同時固有ベクトルである．他方，次の (GW.3) を要請すると，以下で示すように P_0 は非負である ((7.22) を参照)．ゆえに，確かに Ω はハミルトニアン P_0 の

---

[26] 新井 (1997a) の定理 4.5.

[27] 命題 2-16 の応用.

真空である．

＊＊＊＊＊

(GW.3)(スペクトル条件)　P の結合スペクトル[28] $\sigma_{\mathrm{J}}(P)$ は**前方光円錐**

$$V_+ := \{p \in \mathbb{R}^\nu \mid p^0 > 0,\ p^2 > 0\} \tag{7.22}$$

の閉包 $\overline{V_+}$ に含まれる：

$$\sigma_{\mathrm{J}}(P) \subset \overline{V_+}.$$

(GW.4) (微視的因果律)　$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ と $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ の台が空間的に離れているならば，すなわち，任意の $x \in \operatorname{supp} f$, $y \in \operatorname{supp} g$ に対して，$(x-y)^2 < 0$ ならば，$\mathscr{D}$ 上で

$$[\phi(f), \phi(g)] = 0.$$

(GW.5) (真空の一意性)　すべての $U(a, I)$ $(a \in \mathbb{R}^\nu)$ に対して不変なベクトルは Ω の定数倍に限られる．

この公理系の物理的意味について，手短に注釈する．

(GW.1) について：(GW.1) の (a), (c) は量子場のみたすべき数学的な基本的性質である (定義 7-2 を参照)．特性 (GW.1)(b) に量子場の種類に関する特殊性 — いまの場合，場は中性でスピン 0 かつスカラーであるということ — が反映している．ここで“中性”というのは場に伴う素粒子が電荷をもたないことを意味する．スピン 0 で電荷をもたない粒子の物質場は古典的には，$\mathbb{M}^\nu$ 上の実数値関数，すなわち，実スカラー場で記述される．したがって，対応する量子場の，任意の物理的状態ベクトルに関する期待値は実数をとるべきである．上の公理系における $\mathscr{D}$ のすべてのベクトルは物理的状態ベクトルであると解釈される．ゆえに，$\mathscr{D}$ 上に制限された量子場は対称作用素となるべきことが要請される．これが (GW.1)(b) の物理的意味である．スピン 0 の中性スカラー場の例として中性中間子 (π^0 中間子) を記述する場がある．

(GW.2) について：Poincaré 変換 (a, Λ) は $\mathbb{M}^\nu$ 上の点の変換を引き起こす．これに応じて，量子系の状態ベクトルの変換が伴うはずであり，この変換が $U(a, \Lambda)$ である．これがユニタリでなければならないというのは，いま言及した状態の変換において，状態間の遷移確率が保存されなければならないという要請による[29]．(U.2) は真空が Poincaré 変換に対して不変であることの要請であり，物理的に自然なものである．な

---

[28] 2 章，2-3 節，2-3-2 項を参照．

[29] より詳しくは，新井-江沢 (1999b) の 3 章における **Wigner (ウィグナー) の定理**に関わる叙述を参照．

ぜなら，真空は，素粒子が外的には全く存在しない状態として解釈されるので，どの慣性系にうつっても，そのような状態は不変なはずだからである．

(U.3) は場 ϕ が，Poincaré 変換に対して，スカラー場として共変的であるということである．これは発見法的には次のような考察から要請される．まず，$\mathbb{M}^\nu$ 上の古典的実スカラー場 f を考える．$\mathbb{M}^\nu$ 上の任意の点 P が 2 つの座標 x, x' で表されたとし，これらは Poincaré 変換 (a, Λ) で結びついているとする：$x' = (a, \Lambda)x = \Lambda x + a$．$x'$ で記述される座標系での場の形を f' とすれば，$f'(x') = f(x)$ でなければならない．したがって，$f'(x) = f(\Lambda^{-1}(x-a)) = f_{(a,\Lambda)}(x)$，$x \in \mathbb{M}^\nu$．ところで，$\{f_{(a,\Lambda)} \mid (a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow\}$ は Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^\uparrow$ の，$\mathbb{M}^\nu$ 上の関数空間上での表現である (問題 7)．ゆえに，f' は Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^\uparrow$ の表現によってあたえらえる．こうして，(7.20) によって定義される関数 $f_{(a,\Lambda)}$ の意味が理解される．

量子場の理論では，古典場に相当するのは，量子場の期待値 $\langle \Psi, \phi(f)\Phi \rangle$ ($f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$) である．Poincaré 変換した系では，この量は $\left\langle U(a,\Lambda)\Psi, \phi(f_{(a,\Lambda)}) U(a,\Lambda)\Phi \right\rangle$ に等しいはずであるので，

$$\langle \Psi, \phi(f)\Phi \rangle = \langle U(a,\Lambda)\Psi, \phi(f_{(a,\Lambda)})U(a,\Lambda)\Phi \rangle.$$

これが状態の変換に対する，量子場 $\phi(\cdot)$ の変換則 (共変性) を規定する要請である[30]．$\mathscr{D}$ は稠密であるから，$\phi(f)\Phi = U(a,\Lambda)^* \phi(f_{(a,\Lambda)})U(a,\Lambda)\Phi$ が導かれる．そこで，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，$\Phi = U(a,\Lambda)^{-1}\Psi$ とおけば，

$$U(a,\Lambda)\phi(f)U(a,\Lambda)^{-1}\Psi = \phi(f_{(a,\Lambda)})\Psi$$

を得る．こうして (U.3) の要請に到る．

(GW.3) について：量子力学の解釈によれば，エネルギー・運動量作用素の結合スペクトルは，考察下の中性スカラー粒子のエネルギー・運動量の観測値の全体の閉包をあたえる．一方，相対論的粒子のエネルギー・運動量は前方光円錐の閉包に含まれる．したがって，(GW.3) の要請が出てくる．

この要請があると，

$$P^0 \geq 0$$

がしたがうことを見ておこう．P^0, $\boldsymbol{P}$ の強可換性により，ν 次元のスペクトル測度 E で

---

[30] これは，一般論の抽象的レヴェルでは，数学的に証明されることではなく，あくまでも物理的な考察による要請である．他方，具体的な量子場のモデルでは，これが実際に成立するか否かは厳密に証明されなければならない．

$$P^\mu = \int_{\mathbb{R}^\nu} \lambda^\mu \, dE(\lambda)$$

$(\lambda = (\lambda^0, \cdots, \lambda^d))$ となるものがただ 1 つ存在する．$\mathrm{supp}\, E = \sigma_{\mathrm{J}}(P)$ であるから，任意の $\Psi \in D(P^0)$ に対して，

$$\langle \Psi, P^0 \Psi \rangle = \int_{\sigma_{\mathrm{J}}(P)} \lambda^0 \, d\|E(\lambda)\Psi\|^2 \geq 0.$$

したがって，$P^0 \geq 0$.

ついでに，$\sigma_{\mathrm{J}}(P)$ は **Lorentz 不変であること**，すなわち，任意の $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，

$$\{\Lambda p \,|\, p \in \sigma_{\mathrm{J}}(P)\} = \sigma_{\mathrm{J}}(P) \tag{7.23}$$

が成立することを証明しておこう．

(7.23) の左辺の集合を S とすれば，スペクトル写像定理により，$S = \sigma_{\mathrm{J}}(\Lambda P)$ である．ただし，$(\Lambda P)^\mu := \overline{\Lambda^\mu{}_\rho P^\rho}$ (強可換性により，これは自己共役)．一方，任意の $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，

$$(0, \Lambda)(a, I) = (\Lambda a, \Lambda) = (\Lambda a, I)(0, \Lambda)$$

より，

$$U(0, \Lambda)U(a, I) = U(\Lambda a, I)U(0, \Lambda).$$

したがって，

$$U(0, \Lambda)e^{iaP/\hbar}U(0, \Lambda)^{-1} = e^{i(\Lambda a)P/\hbar} = e^{ia(\Lambda^{-1}P)/\hbar}.$$

これは，

$$U(0, \Lambda)P^\mu U(0, \Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1}P)^\mu, \quad \mu = 0, \cdots, d, \tag{7.24}$$

を意味する．したがって，P^μ と $(\Lambda^{-1}P)^\mu$ はユニタリ同値であるから，特に，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\Lambda^{-1}P) = \sigma_{\mathrm{J}}(P)$$

がしたがう．$\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ は任意であったから，Λ^{-1} のかわりに Λ を考えれば，$S = \sigma_{\mathrm{J}}(P)$，すなわち，(7.23) が得られる．

(7.24) はエネルギー・運動量作用素 P が，Lorentz 変換に対して，$\mathbb{M}^\nu$ のベクトルと同じ変換則にしたがうことを示す．

(GW.4) について：相対性理論では，ミンコフスキー時空において空間的に離れた点

どうしは，因果的にたがいに独立である．したがって，これらの点における場の観測はたがいに影響しないと考えられる．他方，複数の量子力学的観測量の観測独立性は，それらを表す作用素の可換性によって表現される (可換でないとハイゼンベルクの不確定性関係に抵触し，観測の独立性は失われうる)．これが (GW.4) の物理的意味である．

(GW.5) について：これは，真空の一意性を並進不変性によって特徴づけるものである．

各 $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，

$$U(\Lambda) := U(0, \Lambda) \tag{7.25}$$

とおけば，$\{U(\Lambda)\}_{\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow}$ は Lorentz 群 $\mathscr{L}_+^\uparrow$ のユニタリ表現をあたえる．$1 \le j,\, k \le d$ $(j \ne k)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{M}^\nu$ 上の写像 $R_{jk}(\theta)$ を

$$(R_{jk}(\theta)x)^\mu := x^\mu, \quad \mu \ne j, k,$$

$$(R_{jk}(\theta)x)^j := x^j \cos\theta - x^k \sin\theta,$$

$$(R_{jk}(\theta)x)^k := x^j \sin\theta + x^k \cos\theta,$$

によって定義する．これは，x^j-x^k 平面における (原点に関する) 角度 θ のユークリッド回転を表す．また，$R_{0j}(\theta)$ を

$$(R_{0j}(\theta)x)^\mu := x^\mu, \quad \mu \ne 0,\, j,$$

$$(R_{0j}(\theta)x)^0 := x^0 \cosh\theta - x^j \sinh\theta,$$

$$(R_{0j}(\theta)x)^j := -x^0 \sinh\theta + x^j \cosh\theta,$$

によって定義する．これは x^0-x^j 平面における (原点に関する) 角度 θ の Lorentz 回転を表す．$R_{j0}(\theta) := R_{0j}(\theta)$ とおく．容易にわかるように，各 $\mu,\, \rho$ $(0 \le \mu,\, \rho \le d)$ に対して，$\{R_{\mu\rho}(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ は $\mathscr{L}_+^\uparrow$ の部分群であり，$\{U(R_{\mu\rho}(\theta))\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ は強連続 1 パラメータユニタリ群になる．したがって，Stone の定理により，

$$U(R_{\mu\rho}(\theta)) = e^{-i\theta M^{\mu\rho}/\hbar} \tag{7.26}$$

となる自己共役作用素 $M^{\mu\rho}$ が存在する．$R_{jk}(\theta) = R_{kj}(-\theta)$, $R_{0j}(\theta) = R_{k0}(\theta)$ であるから，

$$M^{jk} = -M^{kj}, \quad j \ne k,\, j,\, k = 1, \cdots, d,$$

$$M^{0j} = M^{j0}, \quad j = 1, \cdots, d,$$

が成り立つ．作用素の組 $\{M^{\mu\rho}\}_{\mu,\rho=0,\cdots,d,\mu\neq\rho}$ を (軌道) **角運動量作用素**という．

さて，5 つ組 $\{\mathscr{H}, U, \phi, \mathscr{D}, \Omega\}$ をスピン 0 の中性スカラー場の量子論としよう．7-3-4 項の一般的議論によって，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$W_n(f_1 \times \cdots \times f_n) = \langle \Omega, \phi(f_1)\cdots\phi(f_n)\Omega \rangle, \quad f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), \qquad (7.27)$$

をみたす緩増加超関数 $W_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\nu n})$ がただ 1 つ存在する．この超関数 W_n を n 点 **Wightman 超関数**といい，その超関数核を $W_n(x_1, \cdots, x_n)$ と記す：

$$W_n(f) = \int W_n(x_1, \cdots, x_n) f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

量子場 ϕ の核 $\phi(x)$ $(\phi(x) = \int \phi(x) f(x)\, dx)$ との形式的な対応は

$$W_n(x_1, \cdots, x_n) = \langle \Omega, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\Omega \rangle$$

である．

量子場の作用素や真空の概念等を用いる代わりに，これらをいったん忘れて，Wightman 超関数の言葉で場の量子論を特徴づけるのが次に述べる Wightman の公理系である (Wightman (1956), Streater and Wightman (1964))．

Wightman の公理系　**スピン 0 の相対論的中性スカラー場の量子論**とは，以下の (W.1)〜(W.6) をみたす，緩増加超関数の列

$$\{W_n \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\nu n})\}_{n=0}^{\infty} \quad (W_0 := 1)$$

である：

(W.1) **(エルミート性)**　すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n})$ に対して，

$$W_n(f)^* = W_n(f^\dagger), \quad n \geq 1.$$

ただし，

$$f^\dagger(x_1, \cdots, x_n) := f(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1)^*$$

(変数を逆順にして，複素共役をとったもの)．

(W.2) **(相対論的不変性)**　すべての $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n})$ に対して，

$$W_n(f) = W_n(f_{(a,\Lambda)}), \quad n \geq 1.$$

ただし，

$$f_{(a,\Lambda)}(x_1, \cdots, x_n) := f(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \cdots, \Lambda^{-1}(x_n - a)).$$

(W.3) (**正値性**)　すべての $f_0 \in \mathbb{C}, f_1 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), \cdots, f_N \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu N})$ $(N \geq 0)$ に対して,

$$\sum_{n,m=0}^{N} W_{n+m}(f_n^\dagger \times f_m) \geq 0.$$

(W.4) (**スペクトル条件**)　各 $n \geq 2$ に対して,

$$\mathrm{supp}\, F_{n-1} \subset (\overline{V_+})^{n-1} := \{(p_1, \cdots, p_{n-1}) \,|\, p_j \in \overline{V_+}, j = 1, \cdots, n-1\}$$

となる超関数 $F_{n-1} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\nu(n-1)})$ が存在して,

$$W_n(x_1, \cdots, x_n) = \int F_{n-1}(p_1, \cdots, p_{n-1}) e^{i \sum_{j=1}^{n-1} p_j (x_{j+1} - x_j)} dp_1 \cdots dp_{n-1}$$

と書ける ($p_j(x_{j+1} - x_j)$ はミンコフスキー内積). この式は, もちろん, 任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n})$ で左辺, 右辺を均した式が等しいと読む.

(W.5) (**局所性**)　$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n})$ と $j = 1, \cdots, n-1$ に対して,

$$f_j(x) := f(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_j, x_{j+2}, \cdots, x_n), \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{\nu n},$$

を定義する (右辺は, 変数 x_j と x_{j+1} を入れ換えたときの関数 f の値). もし, $\mathrm{supp}\, f_j \subset \{x \in \mathbb{R}^{\nu n} \,|\, (x_j - x_{j+1})^2 < 0\}$ ならば, $W_n(f) = W_n(f_j)$.

(W.6) (**クラスター性**)　任意の空間的ベクトル $a \in \mathbb{M}^\nu$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu j}), g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu(n-j)})$ $(j = 1, \cdots, n-1, n \geq 2)$ に対して,

$$\lim_{\lambda \to \infty} W_n(f \times g_{\lambda a}) = W_j(f) W_{n-j}(g).$$

スピン 0 の相対論的中性スカラー場の量子論 $\{\mathscr{H}, U, \phi, \mathscr{D}, \Omega\}$ において, (7.27) によって定まる超関数列 $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(W_0 := 1)$ が Wightman の公理系をみたすことを示すのは難しくない[31].

逆に, Wightman の公理系をみたす超関数列から, Gårding-Wightman の公理系をみたす 5 つ組 $\{\mathscr{H}, U, \phi, \mathscr{D}, \Omega\}$ を構成することができ, これはユニタリ同値なものを除いて一意的に定まる. この場合, (7.27) が成立する. これを **Wightman の再構成定理**という[32].

こうして, Gårding-Wightman の公理系と Wightman の公理系は同等であることが示される.

---

[31] 江沢-新井 (1988) の pp.50～52 を参照.

[32] 詳しくは, 江沢-新井 (1988) の pp.52～53 を参照. Streater and Wightman (1964) の p.117, Theorem 3-7 も参照.

(GW.1) $\longleftrightarrow$ (W.1),　(GW.2) $\longleftrightarrow$ (W.2)

(GW.1)
ヒルベルト空間の正定値性 } $\longleftrightarrow$ (W.3)

(GW.2)
(GW.3) } $\longleftrightarrow$ (W.4)

(GW.4) $\longleftrightarrow$ (W.5),　(GW.5) $\longleftrightarrow$ (W.6)

図 7-1　Gårding-Wightman の公理系と Wightman の公理系の 関係

Osterwalder-Schrader の公理系　複素関数論の基本的な理念の 1 つは，関数というものは，複素領域まで解析接続してはじめてその本質が浮かび上がってくるというものである．これは超関数にもあてはまる．この理念を Wightman 超関数に適用して得られるのがこれから述べる公理系である．

Wightman の公理系における相対論的共変性，スペクトル条件，局所性を用いると，Wightman 超関数 $W_n(x_1, \cdots, x_n)$ は，$\mathbb{C}^{\nu n} = \mathbb{C}^\nu \times \cdots \times \mathbb{C}^\nu$ ($\mathbb{C}^\nu$ の n 個の直積) の中の部分集合

$$\{((it_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (it_n, \boldsymbol{x}_n)) \,|\, \text{任意の } j \neq k \text{ に対して，} (it_j, \boldsymbol{x}_j) \neq (it_k, \boldsymbol{x}_k)\}$$

へと解析接続される[33]．この部分集合を**非一致 Euclid 領域** (non-coincident Euclidean region) という．これは時間変数を虚数化したわけであるので，**虚数時間**への解析接続とよばれる．これにより，ミコフスキー空間の不定計量はユークリッド計量へと変身するので，いまの解析接続を**ユークリッド化**ともいう．解析接続された W_n も同一の記号で書くことにし，

$$S_n((t_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots (t_n, \boldsymbol{x}_n)) = W_n((it_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (it_n, \boldsymbol{x}_n))$$

とおく．これは，領域

$$\mathscr{E}_n := \{(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{\nu n} \,|\, y_j \neq y_k,\ j \neq k,\ j, k = 1, \cdots, n\}$$

において，実解析的な関数であることが示される．関数 S_n を n 点 **Schwinger 関数**あるいは n **点ユークリッド Green 関数**とよぶ．

Wightman の公理系は，Schwinger 関数の言葉に翻訳することができる．記号をい

---

33) 詳細については，江沢-新井 (1988) の 2 章，2.5 節や Osterwalder and Schrader (1973, 1975), Simon (1974) を参照.

くつか用意しよう：

$$\mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n}) := \{f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n}) \,|\, \text{超平面 } y_j = y_k \ (j \neq k,\, j,k = 1,\cdots,n)$$

$$\text{においては，} f \text{ および } f \text{ のすべての偏導関数は } 0\}.$$

ここで，$\mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n})$ には $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n})$ の相対位相をいれる．

$$\mathscr{S}'_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n}) := \ \mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n}) \text{ 上の連続線形汎関数}.$$

$$\mathscr{S}_{+}(\mathbb{R}^{\nu n}) := \{f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n}) \,|\, \mathrm{supp}\, f \subset (\mathbb{R}^{\nu n})_+\}.$$

ただし，$(\mathbb{R}^{\nu n})_+ := \{((t_1,\boldsymbol{x}_1),\cdots,(t_n,\boldsymbol{x}_n)) \in \mathbb{R}^{\nu n} \,|\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$.

Schwinger 関数の列 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ ($S_0 \equiv 1$) は次の性質 (OS.1)~(OS.5) をみたすことを証明することができる[34].

(OS.1) (**緩増加性とエルミート性**)　各 $n \geq 1$ に対して，$S_n \in \mathscr{S}'_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n})$ であり，任意の $f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n})$ に対して

$$\overline{S_n(f)} = S_n(\theta f^{\dagger}).$$

ただし，

$$S_n(f) = \int S_n(y_1,\cdots,y_n) f(y_1,\cdots,y_n)\, dy_1 \cdots dy_n,$$

$$(\theta f)((t_1,\boldsymbol{x}_1),\cdots,(t_n,\boldsymbol{x}_n)) = f((-t_1,\boldsymbol{x}_1),\cdots,(-t_n,\boldsymbol{x}_n)).$$

(OS.2) (**Euclid 不変性**)　すべての $a \in \mathbb{R}^{\nu}$ と $\Lambda \in SO(\nu)$ (ν 次元の Euclid 回転群) に対して，

$$S_n(f) = S_n(f_{(a,\Lambda)}), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu n}).$$

(OS.3) (**鏡映正値性**)(reflection positivity)　すべての $f_0 \in \mathbb{C}$, $f_1 \in \mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{\nu})$, $\cdots$, $f_N \in \mathscr{S}_+(\mathbb{R}^{\nu N})$ に対して，

$$\sum_{n,m=0}^{N} S_{n+m}(\theta f_n^{\dagger} \times f_m) \geq 0, \quad N \geq 0.$$

(OS.4) (**対称性**)　すべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$S_n(y_1,\cdots,y_n) = S_n(y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(n)}).$$

(OS.5) (**クラスター性**)　任意の $f \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu n}) \cap C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu n})$, $g \in \mathscr{S}_{\neq}(\mathbb{R}^{\nu m}) \cap C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{\nu m})$ に対して，

---

[34] 証明については，Osterwalder and Schrader (1973, 1975), Simon (1974) を参照.

(W.1) ⟶ (OS.1),　(W.2) ⟶ (OS.2)

(W.3) ⟶ (OS.3),　(W.5) ⟶ (OS.4)

(W.6) ⟶ (OS.5)

(W.4) ⟶ 虚数時間への解析接続

図 7-2　Wightman の公理系から Osterwalder-Schrader の公理系への関係

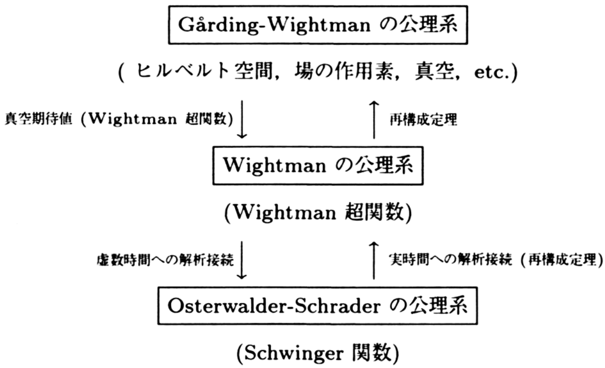


図 7-3　公理系の間の関係

$$\lim_{t\to\infty} S_{n+m}(f \times T_t g) = S_n(f)S_m(g).$$

ただし，

$$(T_t g)((t_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (t_n, \boldsymbol{x}_n)) := g((t_1 - t, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (t_n - t, \boldsymbol{x}_n)).$$

上記の (OS.1)∼(OS.5) を **Osterwalder-Schrader の公理系**という．

公理 (OS.1) における緩増加性の条件を少し強めると，Osterwalder-Schrader の公理系から Wightman の公理系をみたす超関数列を構成することができる (**Osterwalder-Schrader の再構成定理**)[35)]．

Osterwalder-Schrader の公理系は，超関数の理論の 1 つの範疇として，それ自体興味をもちうるものであるが，相対論的量子場を実際に構成する立場にとってもある種の有用性をもつ．これは，次の考察によって示唆されるものである．ミンコフスキー空間

[35)] Osterwalder and Schrader (1973, 1975), Simon (1974) を参照．最近，Wightman の公理系と完全に同等な Osterwalder-Schrader の公理系の修正版が Zinoviev (1995) によって見いだされた．

上の相対論的量子場 ϕ_r $(r=1,\cdots,s)$ がしたがう方程式は，多くの場合，

$$(\Box + m^2)\phi_r(x) = F_r(\phi_1(x),\cdots,\phi_s(x),\nabla\phi_1(x),\cdots,\nabla\phi_s(x))$$

という形に表される．ここで，$\Box$ はダランベールシャン (序章，(0.16) を参照)，$\nabla := (\partial_0,\partial_1,\cdots,\partial_d)$，$m \geq 0$ は定数，F_r は $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{\nu s}$ 上の適当な関数である[36]．これは双曲型の方程式である．変数 $x \in \mathbb{M}^\nu$ の時間成分 x_0 を虚数時間 ix_0 にすると，偏微分作用素 $\Box + m^2$ は $-\Delta + m^2$ になる．ただし，$\Delta = \sum_{\mu=0}^{d} \partial_\mu^2$ は ν 次元のラプラシアンである．したがって，この解析接続により，ミンコフスキー空間上の場 ϕ_r はユークリッド空間上の場 ψ_r になり — 象徴的に表すと，$\psi_r(x) := \phi_r(ix_0,\boldsymbol{x})$ —，場の方程式は，$(-\Delta + m^2)\psi_r(x) = G_r(x)$ という形をとる (G_r は F_r を解析接続したもの)．これは楕円型の方程式であり，双曲型の方程式よりも扱いやすい．つまり，虚数時間に解析接続することで，方程式論的に解析しやすくなる可能性が暗示される．

さらに，次の点も示唆的である．時間成分が純虚数である 2 点 $x_E = (ix_0,\boldsymbol{x})$, $y_E = (iy_0,\boldsymbol{y})$ のミンコフスキー計量による距離は，$-(x_0-y_0)^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 < 0$ であるので，象徴的な意味で空間的である．したがって，微視的因果律を形式的にあてはめると，$[\phi_r(x_E),\phi_{r'}(y_E)] = 0$ $(r,r'=1,\cdots,s)$ であるので，ユークリッド空間上の場 $\psi_r(x)$ $(r=1,\cdots,s)$ は，もし，存在するとすれば，可換な作用素の組をつくることが期待される．可換な作用素の方が非可換な作用素よりも扱いやすいことは言うまでもない．

7-5 節　ユークリッド的量子場

前節の終わりにおいて発見法的に注意したように，ミンコフスキー空間からユークリッド空間への解析接続を量子場のレヴェルで見ると，量子場は可換な作用素値超関数へと変容することが予想される．これに同伴する形で，Gårding-Wightman の公理系における真空も当該の可換な作用値超関数が働くヒルベルト空間のあるベクトルに対応することが推測される．このようなベクトルがもしあれば，これを**ユークリッド的真空**とよぼう．すると，Schwinger 関数は，このユークックッリド的真空に関する，可換な作用素値超関数の期待値によってあたえられることが期待される ((OS.4) にも注意)．少なくともそういう Schwinger 関数のクラスの存在を想定することは作業仮説として

[36] 後の章で扱う，Dirac 場は 1 階の偏微分方程式 — Dirac 方程式 — にしたがうが，2 階の偏微分方程式としては，いま言及した形に書き直せる．

自然である．

こうして，可換な作用素値超関数の組の性質を調べることに導かれる．可換であるということから，それらを適当な測度空間上の関数として表すことができれば都合がよい．この節では，この可能性について調べる．これによって，ユークリッド的量子場の厳密な概念が確立される．

7-5-1　強可換な自己共役作用素の組の確率論的記述

まず，簡単のため，強可換な自己共役作用素の組について考察する．いま，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の強可換な自己共役作用素の組 $\boldsymbol{A} = (A_j)_{j=1}^N$ と単位ベクトル ψ_0 で，A_j $(j = 1, \cdots, N)$ の任意の多項式の定義域に入っているものがあるとし，

$$\mathscr{H} = \overline{\mathscr{L}\{\psi_0,\, A_1^{i_1} \cdots A_N^{i_N} \psi_0 \,|\, N \in \mathbb{N},\, i_j \geq 0\}}$$

が成立する場合を考える．このような場合，ベクトル ψ_0 は，作用素の組 $\boldsymbol{A}$ の**巡回ベクトル** (cyclic vector) とよばれる．

$\boldsymbol{A} = (A_1, \cdots, A_N)$ の結合スペクトル測度を $E_{\boldsymbol{A}}$ とすれば，2 章，2-3 節，2-3-2 項で述べたように，作用素解析により，$A_j = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_j \, dE_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ と表される．任意の N 次元ボレル集合 B に対して，$\mu(B) := \|E_{\boldsymbol{A}}(B)\psi_0\|^2$ とすれば，$(\mathbb{R}^N, \boldsymbol{B}^N, \mu)$ は確率空間になる[37]．

仮定により，$\mathbb{R}^N$ 上の任意の多項式 P に対して，$\psi_0 \in D(P(\boldsymbol{A}))$ であるから，$\int_{\mathbb{R}^N} |P(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) < \infty$，すなわち，$P \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$．また，

$$\langle \psi_0, P(\boldsymbol{A})\psi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} P(\lambda) \, d\mu(\lambda).$$

さらに，

$$\mathscr{L}_0 := \mathscr{L}\{P \,|\, P \text{ は } \mathbb{R}^N \text{ 上の任意の多項式}\}$$

は $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ で稠密である．実際，任意の P に対して，$\langle f, P \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)} = 0$ ($f \in L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$) とすれば，作用素解析により，$\langle f(\boldsymbol{A})\psi_0, P(\boldsymbol{A})\psi_0 \rangle = 0$．仮定により，

---

[37] M を空でない集合，Σ を M の部分集合からなる，1 つのボレル集合体，μ を可測空間 (M, Σ) 上の測度で $\mu(M) = 1$ となるものとする．このとき，3 つ組 (M, Σ, μ) を**確率空間**，μ を M 上の確率測度という．どのボレル集合体を考えているかが文脈から明らかな場合は，単に，確率空間 (M, μ) という言い方をする．(M, Σ) 上の μ-a.e. 有限な実数値可測関数は**確率変数**とよばれる．確率空間についての基本的事項については，新井 (1997a) の付録 B を参照．ここでの論述を理解するには，確率論の詳しい知識は必要ない．

$$\mathscr{D}_0 := \mathscr{L}\{P(\boldsymbol{A})\psi_0 \,|\, P \text{ は } \mathbb{R}^N \text{ 上の任意の多項式}\}$$

は稠密であるから，$f(\boldsymbol{A})\psi_0 = 0$．したがって，$\int_{\mathbb{R}^N} |f(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) = 0$．ゆえに，$f$ は $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ の元として 0 である．

次の定理が成立する．

定理 7-12　$\mathscr{H}$ から $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ へのユニタリ作用素 U で，

(i)　$U\psi_0 = 1$,

(ii)　$UA_jU^{-1} = \lambda_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ (右辺は，j 番目の座標関数によるかけ算作用素)

をみたすものが存在する．

証明　線形作用素 $U_0 : \mathscr{D}_0 \longrightarrow \mathscr{L}_0$ を

$$U_0 P(\boldsymbol{A})\psi_0 := P(\lambda)$$

によって定義できる．このとき，U_0 は等距離写像であり，$\mathrm{Ran}\,(U_0) = \mathscr{L}_0$ であることを確かめるのは容易である．したがって，U_0 は，$\mathscr{H}$ から $L^2(\mathbb{R}^N, d\mu)$ へのユニタリ作用素 U に一意的に拡大される．このユニタリ作用素が (i), (ii) の性質をもつことは容易にわかる．　□

こうして，強可換な自己共役作用素の組は，ある条件のもとで，確率空間上の確率変数の組にユニタリ同値になる．つまり，強可換な自己共役作用素の組によって記述される理論に対して，確率論的に同等な記述ができることが示されたわけである．

7-5-2　確率超過程としてのユークリッド的量子場

前項の議論を強可換な作用素値超関数に拡張することにより，場の量子論の文脈では，次に述べる意味でのユークリッド的量子場の概念 — 7-4 節の終わりに発見法的にふれた，ユークリッド空間上の場 ψ_r に対する厳密な概念 — が確立される．まず，ある一般的な概念を定義する．

定義 7-13　$\mathscr{V}$ を位相線形空間とし，$\mathscr{V}$ の各元 v に対して，確率空間 (M, Σ, μ) 上の確率変数 $\Phi(v)$ があたえられているとする．確率変数の集合 $\{\Phi(v) \,|\, v \in \mathscr{V}\}$ が次の条件をみたすとき，これを **$\mathscr{V}$ 上の (弱い意味での) 確率過程**あるいは**確率場**という：

(i)(線形性)　任意の $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathscr{V}$ に対して，$\Phi(av+bu) = a\Phi(v) + b\Phi(u)$ a.e.

(ii)(連続性)　$\mathscr{V}$ の位相で $v \longrightarrow 0$ ならば，確率収束の意味で $\Phi(v) \longrightarrow 0$ となる[38].

(iii)　Σ は $\{\Phi(v) \mid v \in \mathscr{V}\}$ によって生成される (i.e., Σ はすべての $\Phi(v)$ $(v \in \mathscr{V})$ が可測となる最小のボレル集合体).

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ の中の実数値関数の全体を $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$ で表す.

定義 7-13 において，空間 $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^n)$ が $\mathscr{V}$ の中へ稠密，かつ連続的に埋め込まれている場合，$\{\Phi(v) \mid v \in \mathscr{V}\}$ は**確率超過程**あるいは**超確率場**とよばれる.

一般に，確率空間 (M, Σ, μ) 上の可積分関数 f に対して，その期待値を $\langle f \rangle$ と表す：

$$\langle f \rangle := \int_M f(m)\, d\mu(m).$$

定義 7-14　スピン 0 の中性スカラー量子場の Schwinger 関数 S_n が，$\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^\nu)$ 上の超確率場 $\{\Phi(f) \mid f \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^\nu)\}$ を用いて，

$$S_n(f_1 \times \cdots \times f_n) = \langle \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_n) \rangle, \quad n \geq 1,\ f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu),\ j = 1, \cdots, n,$$

と表示されるとき，$\{\Phi(f) \mid f \in \mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^\nu)\}$ を**ユークリッド的量子場**あるいは単に**ユークリッド場**とよぶ.

この定義を言葉で言い直せば，ユークリッド的量子場というのは，その期待値が Schwinger 関数をあたえるような，$\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^\nu)$ 上の超確率場のことである．このような対象がある意味で自然なものであることは上に述べた通りである[39].

ユークリッド量子場のみたすべき性質は，Nelson (1973) によって，公理系の形でまとめられた．この **Nelson の公理系**から，ミンコフスキー空間上の場の量子論が再構成される．しかし，ここでは，これについて述べることは割愛する[40].

---

[38] 確率空間 (M, Σ, μ) 上の確率変数の列 $\{f_n\}_n$ が確率変数 f に**確率収束**するとは，すべての $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{m \in M \mid |f_n(m) - f(m)| > \varepsilon\} = 0$$

が成立するときをいう．これは，概収束，すなわち,「$f_n(m) \longrightarrow f(m)$, μ-a.e.m」よりも弱い概念である (概収束 $\Longrightarrow$ 確率収束).

[39] 基本的な例については，江沢-新井 (1988) の p.137 を参照.

[40] Nelson (1973) や Simon (1974) を参照.

7-6 節　抽象的な量子場の概念

これまでに議論した量子場の概念はもっと抽象化することができる．まず，作用素値超関数の抽象版を定義する：

定義 7-15　$\mathscr{F}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間，$\mathscr{V}$ をベクトル空間とする．各 $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{F}$ 上の稠密に定義された線形作用素 $\phi(f)$ が対応し，次の条件 $(\phi.1) \sim (\phi.3)$ をみたすとき，この対応 $\phi : f \longrightarrow \phi(f)$ を，$(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathscr{V}$ 上の**作用素値実線形汎関数** (operator-valued real-linear functional) という．

$(\phi.1)$　すべての $f \in \mathscr{V}$ に対して，$\mathscr{D} \subset D(\phi(f)) \cap D(\phi(f)^*)$．

$(\phi.2)$(実線形性)　すべての $f, g \in \mathscr{V}$, a, $b \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathscr{D}$ 上で，$\phi(af + bg) = a\phi(f) + b\phi(g)$．

注意 7-5　$\mathscr{V}$ が位相線形空間であれば，上の定義に，

$(\phi.3)$(連続性)　任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{D}$ に対して，写像 $f \longrightarrow \langle \Psi, \phi(f)\Phi \rangle_{\mathscr{F}}$ は $\mathscr{V}$ の位相で連続である

という条件を加える場合がある．

例 7-5　$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，L を $\mathscr{H}$ 上の線形作用素とし，

$$\phi^L(f) := \Phi_{\mathrm{S}}(Lf), \quad f \in D(L),$$

とおく．ただし，$\Phi_{\mathrm{S}}(\cdot)$ はボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ における Segal の場の作用素である．このとき，ϕ^L は，$(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}), \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}))$ で働く，$D(L)$ 上の作用素値実線形汎関数である．

定義 7-16　$\mathscr{F}, \mathscr{D}, \mathscr{V}$ を定義 7-15 のものとする．H を $\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素，ϕ_r $(r = 1, \cdots, s)$ を $(\mathscr{F}, \mathscr{D})$ で働く，$\mathscr{V}$ 上の作用素値実線形汎関数とする．このとき，H と ϕ_r の組 $(H, \{\phi_r\}_{r=1}^s)$ を**抽象的量子場の理論 (モデル)** とよぶ．この場合，H をハミルトニアン，$\{\phi_r\}_{r=1}^s$ を時刻 0 の場といい，**時刻 t の (抽象的) 量子場**は

$$\phi_r(t, f) := e^{itH}\phi_r(f)e^{-itH}, \quad t \in \mathbb{R}, f \in \mathscr{V},$$

によって定義される．

例 7-6　例 7-5 において，たとえば，$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ (T は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素) をハミルトニアン，ϕ^L を時刻 0 の場とする抽象的量子場の理論が考えられる．この場合，

(4.102) によって，時刻 t の場 $\phi^L(t,f)$ $(f \in D(L))$ は陽に求められる：

$$\phi^L(t,f) := e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}\phi^L(f)e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)} = \Phi_{\mathrm{S}}(e^{itT}Lf) \quad (D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \text{ 上}).$$

ハミルトニアンが例 7-5 のものとは異なる，抽象的量子場のモデルの 1 つを 12 章で論じる．

ノート

相対論的な場の量子論の一般論 (公理論) の詳しい叙述は，たとえば，ボゴリューボフ他 (1972), Jost (1963), Streater and Wightman (1964) にみいだされる．本章ではふれることができなかった，C^* 環や von Neumann 環を用いる代数的アプローチについては，荒木 (1993) や Haag (1992) を参照されたい．最近の発展については，Strocchi (1993), Hofmann (1997) 等が参考になろう．

7 章演習問題

♮**1.** $\mathbb{R}$ 上の複素数値連続関数 f が関数方程式 $f(t+t') = f(t)f(t')$ $(t, t' \in \mathbb{R})$ をみたしているとする．$f(0) \neq 0$, $f(1) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ とし，$c = \log f(1)$ とおく．このとき，

$$f(t) = e^{ct}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

となることを次の手順で証明せよ．

(i)　$f(0) = 1$ を示せ．さらに，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$f(t) \neq 0$ かつ $f(-t) = f(t)^{-1}$ を示せ．

(ii)　任意の $t > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f(nt) = f(t)^n$ を示せ．

(iii)　任意の正の有理数 q に対して，$f(q) = e^{cq}$ を示せ．

ヒント　$q = m/n$ $(n, m \in \mathbb{N})$ とすると，(ii) により，$f(q) = f(1/n)^m$．(ii) は，また，$f(1) = f(1/n)^n$，i.e., $f(1/n) = e^{c/n}$ を意味する．

(iv)　(iii) と f の連続性を用いて，$(*)$ が任意の $t \geq 0$ に対して成り立つことを導け．

(v)　(iv) と (i) から，$(*)$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことを導け．

2. $\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，H を $\mathscr{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素とし，$E_0(H)$ を (7.7) によって定義する．$\mathscr{H}_0 := \ker(H - E_0(H))$ とおき，$\mathscr{H}_0$ 上への正射影作用素を P_0 とする．

(i)

$$\text{s-}\lim_{\beta \to \infty} e^{-\beta(H - E_0(H))} = P_0$$

を示せ.

ヒント　H のスペクトル測度を E_H とすれば，$P_0 = E_H(\{E_0(H)\})$ であり，任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\|e^{-\beta(H-E_0(H))}\Psi - P_0\Psi\|^2 = \int_{(E_0(H),\infty)} e^{-2\beta(\lambda - E_0(H))}\, d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2$$

と書けることを示せ (右辺の積分区間には点 $E_0(H)$ は含まれないことに注意).

(ii)　$\dim \mathscr{H}_0 = 1$ で，$\Omega \in \mathscr{H}_0$, $\|\Omega\| = 1$ とすれば，$\langle \Omega, \Psi\rangle > 0$ となる任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\Omega = \text{s-}\lim_{\beta\to\infty} \frac{e^{-\beta H}\Psi}{\sqrt{\langle \Psi, e^{-2\beta H}\Psi\rangle}}$$

であることを示せ．さらに，

$$E_0(H) = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log\langle \Psi, e^{-\beta H}\Psi\rangle$$

が成立することを示せ.

(iii)　すべての $\varepsilon > 0$ に対して，$E_H([E_0(H), E_0(H)+\varepsilon))\Psi \neq 0$ をみたす任意の $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$E_0(H) = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \log\langle \Psi, e^{-\beta H}\Psi\rangle$$

が成立することを示せ.

ヒント　スペクトル表示 $\langle \Psi, e^{-\beta H}\Psi\rangle = \int_{[E_0(H),\infty)} e^{-\beta\lambda}\, d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2$ を用いて，右辺を上下から評価せよ．下から評価するとき，積分区間を $[E_0(H), E_0(H)+\varepsilon)$ と $[E_0(H)+\varepsilon, \infty)$ に分けて考察せよ.

注意　(i) は H の基底状態空間への正射影作用素を H によって生成される熱半群 $e^{-\beta H}$ $(\beta > 0)$ を用いて表す式である．(ii) は H の基底状態が一意的に存在する場合に，その基底状態と基底状態エネルギーを $e^{-\beta H}$ を用いて表す式である．(iii) は H が基底状態をもつか否かにかかわらず，H の最低エネルギーを $e^{-\beta H}$ から計算する方法をあたえる．基底状態および最低エネルギーの性質を調べることは物理的にも極めて重要であり，上記の公式はこの問題の解析のために有用である.

3. $\mathscr{H}, H$ は問題 2 のものとする.

(i)　ある $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\Omega_\Psi = \text{s-}\lim_{\beta\to\infty} \frac{e^{-\beta H}\Psi}{\sqrt{\langle \Psi, e^{-2\beta H}\Psi\rangle}}$$

が存在して，$\Omega_\Psi \neq 0$ ならば，Ω_Ψ は H の固有ベクトルであることを示せ.

ヒント　$e^{-tH}\Omega_\Psi$ $(t > 0)$ を考え，$e^{-tH}\Omega_\Psi = c(t)\Omega_\Psi$ となる正数 $c(t)$ が存在するこ

とをまず示せ．e^{-tH} の強連続性と半群性から，$c(t)$ は t の連続関数であり，$c(t+s)=c(t)c(s)$ $(t,s\in\mathbb{R})$ を導け．問題 1 と同様にして，$c(t)=e^{-Et}$ ($E\in\mathbb{R}$ は定数) と書けることを示せ．

(ii) (i) の Ψ が，すべての $\varepsilon>0$ に対して，$E_H([E_0(H),E_0(H)+\varepsilon))\Psi\neq 0$ をみたすならば，Ω_Ψ は H の基底状態であることを示せ．

ヒント (i) と問題 2-(iii).

注意 この問題に述べられた事実は，量子力学や場の量子論の具体的なモデルのハミルトニアンの固有ベクトル，特に基底状態の存在を示すのに応用可能である．

4. $\{\mathscr{F},\mathscr{D},H,\varphi\}$ ($s=1$ の場合) をハミルトニアン H をもつ量子場の理論とし，H は下に有界で基底状態 $\Psi_0\in\mathscr{D}$ をもつとする．2 点真空期待値

$$E_2(f,g):=\langle\Psi_0,\varphi(f)\varphi(g)\Psi_0\rangle,\quad f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu),$$

を考える．このとき，各 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の有界なボレル複素測度 $\mu_{f,g}$ が存在して，

$$E_2(f,g_{(t,\mathbf{0})})=\int_{\mathbb{R}}e^{it\lambda}\,d\mu_{f,g}(\lambda),\quad t\in\mathbb{R},$$

と表されることを示せ．

ヒント H のスペクトル分解を用いよ．

5. $\{\mathscr{F},\mathscr{D},(H,\boldsymbol{P}),\varphi\}$ ($s=1$ の場合) を並進共変な量子場の理論とし，H は下に有界で基底状態 $\Psi_0\in\mathscr{D}$ を一意的にもつとする．このとき，各 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\mathbb{R}^\nu$ 上の有界なボレル複素測度 $\nu_{f,g}$ が存在して，

$$E_2(f,g_a)=\int_{\mathbb{R}^\nu}e^{ia\lambda}\,d\nu_{f,g}(\lambda),\quad a\in\mathbb{R}^\nu,$$

と表されることを示せ．ただし，$a\lambda$ は a と λ のミンコフスキー内積を表す．

ヒント $H,\boldsymbol{P}$ の同時スペクトル分解を用いよ．

6. X を空でない集合とし，G は，X から X への全単射な写像の集まりで，写像の合成を積として群をなしているとする[41]．X 上の関数の全体を $\mathfrak{F}(X)$ とおく．各 $g\in G$ に対して写像 $T_g:\mathfrak{F}(X)\longrightarrow\mathfrak{F}(X)$ を

$$(T_gf)(x):=f(g^{-1}x),\quad x\in X,\ f\in\mathfrak{F}(X),$$

によって定義する．

(i) $\{T_g\,|\,g\in G\}$ は G の表現であること，すなわち，任意の $g_1,g_2\in G$ に対して，

$$T_{g_1g_2}=T_{g_1}T_{g_2}$$

---

[41] このような集合 G は X 上の**変換群**とよばれる．

が成立することを示せ[42].

(ii)　μ を (X, Σ) (Σ は X の部分集合からなる，1 つのボレル集合体) 上の測度で，G-不変，すなわち，すべての $g \in G$ と $B \in \Sigma$ に対して

$$\mu(gB) = \mu(B), \quad gB := \{gx \mid x \in B\}$$

が成り立つものとする．このとき，各 $g \in G$ に対して，T_g は $L^2(X, d\mu)$ 上のユニタリ作用素であることを示せ．

♮**7.** 各 $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，$\mathfrak{F}(\mathbb{M}^\nu)$ 上の写像 $T_{(a,\Lambda)}$ を

$$T_{(a,\Lambda)} f := f_{(a,\Lambda)}, \quad f \in \mathfrak{F}(\mathbb{M}^\nu),$$

によって定義する．右辺は (7.20) によって定義される関数である．このとき，$\{T_{(a,\Lambda)} \mid (a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow\}$ は $\mathscr{P}_+^\uparrow$ の表現であることを示せ．

8. $d \geq 2$ とし，SO(d) を d 次元回転群とする．すなわち，SO(d) は d 次の直交行列 R で $\det R = 1$ をみたすものの全体である．各 $R \in \mathrm{SO}(d)$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の写像 $T(R)$ を

$$(T(R)f)(x) := f(R^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．このとき，$\{T(R)\}_{R \in \mathrm{SO}(d)}$ は SO(d) のユニタリ表現であることを示せ．

9. $\{\mathscr{H}, U, \phi, \mathscr{D}, \Omega\}$ をスピン 0 の中性スカラー場の量子論とする．$\mathscr{D} \subset D(P^\mu)$ ($\mu = 0, \cdots, d$) であり，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$P^\mu \mathscr{D} \subset D(\phi(f))$ ($\mu = 0, \cdots, d$) がみたされるとする．さらに，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\mathscr{H}$-値関数：$t \longrightarrow \phi(f)e^{-itP^\mu}\Psi$ は強連続であるとする．このとき，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$D_\mu \phi(f)\Psi = \frac{i}{\hbar}[P_\mu, \phi(f)]\Psi, \quad \mu = 0, \cdots, d,$$

が成立することを示せ．

ヒント　(GW.2) の (U.3) から，

$$U(a, I)\phi(f)U(a, I)^{-1} = \phi(f_{(a,I)}), \quad a \in \mathbb{R}^\nu.$$

これと (7.21b) を用いて，命題 7-5 を応用せよ．

10. $\{\mathscr{H}, U, \phi, \mathscr{D}, \Omega\}$ をスピン 0 の中性スカラー場の量子論とする．$\mathscr{D} \subset D(M^{\mu\rho})$ ($\mu, \rho = 0, \cdots, d$) であり，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$M^{\mu\rho}\mathscr{D} \subset D(\phi(f))$ ($\mu, \rho = 0, \cdots, d$) がみたされるとする．さらに，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\mathscr{H}$-値関数：$t \longrightarrow \phi(f)e^{-itM^{\mu\rho}}\Psi$ は強連続であるとする．このとき，任意の $\Psi \in \mathscr{D}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$[M^{jk}, \phi(f)]\Psi = i\hbar\phi((x^k D_j - x^j D_k)f)\Psi,$$

$$[M^{0j}, \phi(f)]\Psi = i\hbar\phi((x^k D_0 + x^0 D_j)f)\Psi, \quad j, k = 1, \cdots, d,$$

---

[42] 群の表現の定義については，3 章，脚注 11 を見よ．

を示せ．

ヒント (GW.2) の (U.3) から

$$U(\Lambda)\phi(f)U(\Lambda)^{-1} = \phi(f_{(0,\Lambda)}), \quad \Lambda \in \mathscr{L}_+^{\uparrow}.$$

これと (7.26) を用いて，命題 7-5 を応用せよ．

11. $\mathscr{F}$ をヒルベルト空間，H を $\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素とする．$\mathbb{R}^\nu$ 上の写像 I_0 を

$$I_0 x := (-x^0, \boldsymbol{x}), \quad x \in \mathbb{R}^\nu,$$

によって定義する．I_0 を**時間反転**という．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$T_t : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ (時間 t による並進) を

$$T_t x := (x^0 - t, \boldsymbol{x}), \quad x \in \mathbb{R}^\nu,$$

によって定義し，

$$G_0 := \{I, I_0, T_t \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

とおく (I は恒等写像)．集合 G_0 から $\mathscr{F}$ 上の写像 $U(g)$ ($g \in S$) で次の性質をみたすものがあるとする：

(a) 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{F}$ に対して，$|\langle U(I_0)\Psi, U(I_0)\Phi\rangle| = |\langle \Psi, \Phi\rangle|$.

(b) $U(I) = I$ かつ任意の g_1, $g_2 \in G_0$ に対して，

$$U(g_1)U(g_2) = \omega(g_1, g_2)U(g_1 g_2). \qquad (**)$$

ただし，$\omega(g_1, g_2)$ は絶対値が 1 の複素数である．

(c) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(T_t) = e^{itH/\hbar}$.

このとき，次の問いに答えよ．

(i) $U(I_0)$ は全単射であることを示せ．

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$U(I_0)e^{itH}U(I_0)^{-1} = e^{-itH}$ を示せ．

ヒント $I_0 T_t = T_{-t} I_0$ ($t \in \mathbb{R}$) に注意．

(iii) H は非負または「非有界で下に有界である」とする．このとき，実数 θ と $\mathscr{F}$ 上の反ユニタリ作用素 U_0 があって，$U(I_0) = e^{i\theta}U_0$ という形に表されることを示せ．

ヒント (a) と Wigner の定理により，$U(I_0)$ は反ユニタリ作用素かユニタリ作用素のどちらかに Wigner 同値である (新井-江沢 (1999b) の pp.317〜318 を参照)．もし，$U(I_0)$ がユニタリ作用素に Wigner 同値であるならば，(ii) から，H と $-H$ がユニタリ同値になることを示せ．

注意 この問題の量子力学の文脈における意味は次の通りである．一般に，群 G からヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ への写像 U があって，各 $U(g)$ ($g \in G$) は内積の絶対値を保存し (i.e., $|\langle U(g)\Psi, U(g)\Phi\rangle| = |\langle \Psi, \Phi\rangle|$ (Ψ, $\Phi \in \mathscr{H}$))，任意の g_1, $g_2 \in G$ に対して $(**)$ が成立する

とき，$\{U(g) \mid g \in G\}$ を G の**射線表現**という．量子力学においては，群 G によって表される対称性は，状態のヒルベルト空間において，最も一般的には，その射線表現として表される[43]．この意味で上の問題設定は自然なものである[44]．この問題の結論は，ハミルトニアン H が (iii) の条件にしたがうとき，時間反転に伴う状態の変換は反ユニタリ作用素によって表されるということである．

[43] これは Wigner の定理の帰結である．詳しくは，ボゴリューボフ他 (1972) の 2 章，§2.3 を参照．

[44] G_0 それ自体は群ではないが，G_0 から生成される群が考えられる．

第 8 章

De Broglie 場の量子論

非相対論的量子場の 1 つの典型である de Broglie 場の量子論を数学的に厳密に構成する.

8-1 節　de Broglie 場の形式論

8-1-1　古典場の理論

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ において，質量 $M > 0$ の非相対論的な素粒子 (たとえば電子) が，実数値関数 V で記述されるポテンシャルのもとで運動する系を考えよう．この系を de Broglie によって提唱された物質波の観点からとらえるならば，それは，1 つの物質波の場 — 物質場 — によって記述されることになる．この物質場は，$\nu = 1 + d$ 次元時空 $\mathbb{R}^\nu$ 上の複素数値関数 $\Psi_{\rm cl}$ によって表される[1]．ここで注意すべきことは，物質場の理論は，マクスウェルの電磁場の理論と同様の "位階" にある古典場の理論の一種であるということである．いま考察している物質場は **de Broglie 場**とよばれる．簡単のため，"スピン" のような内部自由度は考慮にいれないとすれば，de Broglie 場は偏微分方程式

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j^2} + V(\boldsymbol{x})\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})$$

$$(t,\boldsymbol{x}) = (t,x_1,\cdots,x_d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^\nu, \tag{8.1}$$

---

[1] 添字 "cl" は "classical (古典的)" の略.

にしたがうと仮定される．これを **de Broglie 場の方程式**という[2]．

方程式 (8.1) を導くラグランジュ密度関数は

$$L_{\mathrm{dB}}(t,\boldsymbol{x}) := i\hbar\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})^*\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x}) - \frac{\hbar^2}{2M}\sum_{j=1}^{d}\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})^*\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$$

$$- V(\boldsymbol{x})\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})^*\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x}) \tag{8.2}$$

であることがわかる．ただし，

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{8.3}$$

実際，

$$\frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}}^*)} = 0,\ \frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}}^*)} = -\frac{\hbar^2}{2M}\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}},\ \frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial\Psi_{\mathrm{cl}}^*} = i\hbar\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}} - V\Psi_{\mathrm{cl}}, \tag{8.4a}$$

$$\frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}})} = i\hbar\Psi_{\mathrm{cl}}^*,\ \frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}})} = -\frac{\hbar^2}{2M}\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}}^*,\ \frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial\Psi_{\mathrm{cl}}} = -V\Psi_{\mathrm{cl}}^*, \tag{8.4b}$$

であるから，オイラー-ラグランジュ方程式

$$\partial_t\frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}}^*)} + \partial_j\frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}}^*)} - \frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial\Psi_{\mathrm{cl}}^*} = 0$$

は (8.1) を導く．正準変数 Ψ_{cl}^* に関するオイラー-ラグランジュ方程式

$$\partial_t\frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}})} + \partial_j\frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial(\partial_j\Psi_{\mathrm{cl}})} - \frac{\partial L_{\mathrm{dB}}}{\partial\Psi_{\mathrm{cl}}} = 0$$

も (8.1) を導くことがわかる．

(8.4a) の第 1 式から，Ψ_{cl}^* の正準共役場は存在しないことがわかる．他方，(8.4b) の第 1 式は，$i\hbar\Psi_{\mathrm{cl}}^*$ が Ψ_{cl} の正準共役場であることを示す．したがって，系の全エネルギーを表すハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{cl}} := \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\,\{i\hbar\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})^*\partial_t\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x}) - L_{\mathrm{dB}}(t,\boldsymbol{x})\}$$

---

[2] 朝永 (1997b) の §39 を参照．偏微分方程式論の分野では，方程式 (8.1) は，通常，シュレーディンガー方程式とよばれる．だが，方程式の形は同じでも，その物理的な意味は異なるから注意すべきである．"シュレーディンガー方程式" という名称は，物理的には，有限自由度か無限自由度かを問わず，量子系の状態ベクトルがしたがう方程式に対して用いられるべきである．他方，いま考察している Ψ_{cl} は古典的な波動場であり，量子力学系の状態ベクトルを表すものではない．このことは，(8.1) の右辺に，de Broglie 場の自己相互作用を表す非線形項 — たとえば，$|\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})|^{2p}\Psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x})$ $(p \geq 1)$ — を付け加えて考察するとよりはっきりする．この場合には，場の方程式は非線形であるので，もはや，状態ベクトルに対する方程式として解釈できない．なぜなら，複数の状態ベクトルの 1 次結合は，特殊な場合を除いて，1 つの状態ベクトルを表すので (重ね合わせの原理)，状態ベクトルに対する時間発展の方程式は線形でなければならないからである．ここで注意した事柄に関して，さらに詳しい物理的背景については，朝永 (1997b) を参照．

$$= \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x} \left\{ \sum_{j=1}^{d} \frac{\hbar^2}{2M} \partial_j \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^* \partial_j \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x}) \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^* \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x}) \right\}.$$

$\Psi_{\rm cl}$ は 2 回微分可能であるとし，$\Psi_{\rm cl}^* \partial_j \Psi_{\rm cl} \longrightarrow 0$ $(|\boldsymbol{x}| \longrightarrow \infty)$ と仮定すれば，部分積分により，

$$\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \partial_j \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^* \partial_j \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x}) = -\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^* \Delta \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x}).$$

ここで，$\Delta := \sum_{j=1}^{d} \partial_j^2$ は d 次元のラプラシアンである．したがって，

$$H_{\rm cl} = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^* \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\boldsymbol{x}) \right) \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})$$

となる．

序章の 0-2-1 項の一般論から，物質場 $\Psi_{\rm cl}$ が方程式 (8.1) をみたすならば，$\Psi_{\rm cl}$ に対する自然な付加的条件のもとで，$dH_{\rm cl}/dt = 0$，すなわち，$H_{\rm cl}$ は時刻 t に依らない保存量であることがわかる．したがって，

$$H_{\rm cl} = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi_{\rm cl}(\boldsymbol{x})^* \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(\boldsymbol{x}) \right) \psi_{\rm cl}(\boldsymbol{x}) \tag{8.5}$$

と書ける[3]．ただし，$\psi_{\rm cl}(\boldsymbol{x}) := \Psi_{\rm cl}(0,\boldsymbol{x})$ は時刻 0 の場である．

8-1-2　量子場に対する発見法的議論

de Broglie 場の量子版を数学的に厳密に構成するための発見法的議論を簡単に見ておくことにする．

序章で述べた正準量子化の考え方をいまの場合にあてはめると，de Broglie 場の量子化とは，$\psi_{\rm cl}(\boldsymbol{x})$ を適当なヒルベルト空間で働く作用素値超関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ に読み換えることである．上に述べたように，$\Psi_{\rm cl}$ の正準共役場は，$i\hbar\Psi_{\rm cl}^*$ であるから，正準量子化の処方では，ψ は，正準交換関係 $[\psi(\boldsymbol{x}), i\hbar\psi(\boldsymbol{y})^*] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，すなわち，

$$[\psi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y})^*] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad [\psi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y})] = 0, \tag{8.6}$$

にしたがうことが要請される．ここで，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は付録 D の例 D-3 によって定義されるデルタ超関数である．このような作用素値超関数 ψ が存在すれば，これが量子化された de Broglie 場の候補の 1 つとなるものである．この場合，対応する，量子場のハミルトニアンは

---

[3] ラグランジュ形式によらないで，物理的な議論から (8.5) を導く議論については，朝永 (1997b) の §40 を参照．

$$H_{\mathrm{QM}} = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^* \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x}) \tag{8.7}$$

という形をとることになる．このとき，量子場 ψ のハイゼンベルク作用素は

$$\psi(t, \boldsymbol{x}) := e^{itH_{\mathrm{QM}}/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})e^{-itH_{\mathrm{QM}}/\hbar} \tag{8.8}$$

によって定義される．これは，形式的に，de Broglie 場の方程式をみたす．実際，

$$\partial_t\psi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{i}{\hbar}e^{itH_{\mathrm{QM}}/\hbar}[H_{\mathrm{QM}}, \psi(\boldsymbol{x})]e^{-itH_{\mathrm{QM}}/\hbar}.$$

一方，(8.6) を用いると，

$$\begin{aligned}
[H_{\mathrm{QM}}, \psi(\boldsymbol{x})] &= \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{y}\, [\psi(\boldsymbol{y})^*, \psi(\boldsymbol{x})]\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{y})\right)\psi(\boldsymbol{y}) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{y}\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{y})\right)\psi(\boldsymbol{y}) \\
&= -\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\partial_t\psi(t, \boldsymbol{x}) &= -\frac{i}{\hbar}e^{itH_{\mathrm{QM}}/\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x})e^{-itH_{\mathrm{QM}}/\hbar} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)e^{itH_{\mathrm{QM}}/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})e^{-itH_{\mathrm{QM}}/\hbar} \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(t, \boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \boldsymbol{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(t, \boldsymbol{x}). \tag{8.9}$$

8-2 節　ボソンフォック空間上での構成

前節，8-1-2 項の発見法的議論を厳密化する．この節では，その核が (8.6) をみたす作用値超関数をボソンフォック空間で構成することにより，これを遂行する．

8-2-1　座標表示でのボソンフォック空間と運動量表示でのボソンフォック空間

$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\mathrm{s}}^{n} L^2(\mathbb{R}^d) \tag{8.10a}$$

を考える．4 章，例 4-1 によって，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}) \tag{8.10b}$$

というふうに同一視される．以下，この同一視を自由に用いる．この同一視に付随して，作用素に関して次の同一視の規約を設ける：

[規約] (8.10b) の同型をあたえるユニタリ作用素を W_{b} とする (4 章，例 4-1)．$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の線形作用素 A に対して，$\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ 上の線形作用素 $W_{\mathrm{b}}AW_{\mathrm{b}}^{-1}$ も — 特に誤解の恐れがない限り — 同じ記号 A で表す．$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の線形作用素 A と $\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ 上の線形作用素 B について,「$A = B$」と書く場合，この意味は $W_{\mathrm{b}}AW_{\mathrm{b}}^{-1} = B$ ということである．

また，無用の混乱を避け，物理的対応を明確にするために，d 次元空間の位置 (配位) $\boldsymbol{x}$ を記述するための座標空間としての $\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}$，波数 $\boldsymbol{k}$ を記述するための座標空間としての $\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}$ と記す (ただし，文脈から明らかな場合は添字の $\boldsymbol{x}$ や $\boldsymbol{k}$ を省く場合がある)．数学的には，$\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}$ は $\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}$ の双対空間である．

$L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{k}})$ の元 $\Psi^{(n)}$ の変数依存性は，$\Psi^{(n)}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)$ ($\boldsymbol{k}_j \in \mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}$) と書かれる．各ベクトル $\boldsymbol{k}_j$ は，物理的には問題にしているボソンの波数ベクトルを表す．de Broglie-Einstein の関係 (0.40) により，$\hbar\boldsymbol{k}_j$ が，粒子的描像での，対応する運動量になる．したがって，$\Psi^{(n)}$ は物理的には，n 個の同種のボソンからなる系の波数ベクトル空間での状態ベクトルを表す[4)]．

同様に，$L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}})$ の元は，物理的には，n 個の同種のボソンからなる系の座標表示での状態ベクトルを表す．

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ を**座標表示でのボソンフォック空間**，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ を**運動量表示でのボソンフォック空間**とよぶ．

$\mathscr{F}_d : L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ をフーリエ変換としよう：

$$(\mathscr{F}_d f)(\boldsymbol{k}) := \hat{f}(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}). \tag{8.11}$$

このとき，$\mathscr{F}_d$ に対する第 2 種の第 2 量子化作用素

$$\Gamma(\mathscr{F}_d) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes^{n} \mathscr{F}_d \tag{8.12}$$

---

4) 4 章，4-1 節で述べたように，同種のボソンからなる多粒子系の状態は，各ボソンの任意の置換に関して対称でなければならない．

($\overset{0}{\otimes}\mathscr{F}_d := 1$) は $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ から $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ へのユニタリ作用素である (4 章，4-6 節，4-6-4 項を参照)．つまり，座標表示でのボソンフォック空間と運動量表示でのボソンフォック空間は，フーリエ変換に対する第 2 種の第 2 量子化を通して，同型になっている．

8-2-2　座標表示でのボソンフォック空間における消滅作用素と生成作用素

座標表示でのボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ における消滅作用素を $\psi(f)$ ($f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$) で表す．4 章，例 4-2 によって，いまの場合，任意の $\Psi \in D(\psi(f))$ と $\Phi \in D(\psi(f)^*)$ に対して，

$$(\psi(f)\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})^* \Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\, d\boldsymbol{x}, \tag{8.13a}$$

$$(\psi(f)^*\Phi)^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n f(\boldsymbol{x}_j)\Phi^{(n-1)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{x}}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n), \quad n \geq 1, \tag{8.13b}$$

という形をとる．命題 4-5 によって，すべての $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，有限粒子ベクトル空間 $\mathscr{F}_{\rm b,0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ の上で，

$$[\psi(f), \psi(g)^*] = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}, \quad [\psi(f), \psi(g)] = 0, \quad [\psi(f)^*, \psi(g)^*] = 0, \tag{8.14}$$

が成立する．

$\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ における個数演算子を抽象論におけるのと同じ記号 $N_{\rm b}$ で表す．

例 7-3 と同様に，対応：$f \longrightarrow \psi(\bar{f})$ および $f \longrightarrow \psi(f)^*$ ($f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$) は，$(\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})), D(N_{\rm b}^{1/2}))$ で働く，作用素値超関数である．それぞれの作用素値超関数核を $\psi(\boldsymbol{x})$, $\psi(\boldsymbol{x})^*$ で表そう．すると，これらは象徴的に (8.6) をみたす (もちろん，これらの式は，$f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ で形式的に均してできる数学的に意味のある関係式 (つまり，(8.14)) が成立すると読む)．これで，前節の発見法的議論で現れた $\psi(\boldsymbol{x})$ に対する候補が見つかったことになる．

8-2-3　量子 de Broglie 場とハミルトニアン

以後，d 次元の一般化されたラプラシアンを Δ で表す：

$$\Delta := \sum_{j=1}^d D_j^2.$$

ここで，D_j は，$\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}$ の点を $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_d)$ と表すとき，変数 x_j に関する一般化された偏微分作用素である．$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ 上で働く作用素

$$h_V = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V \tag{8.15}$$

を考える．これは，**シュレーディンガー作用素**とよばれる作用素であり，量子力学的には，(粒子的描像から見て) 質量 M の 1 個の粒子が，ポテンシャル V のもとで運動する系のハミルトニアンを表す．次の仮定をおく．

仮定

(DB.1)　V はルベーグ測度に関して a.e. 有限な実数値可測関数である．

(DB.2)　h_V は本質的に自己共役である．

この仮定のもとで，h_V の閉包 $\overline{h}_V$ は自己共役であるから，強連続 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{it\overline{h}_V/\hbar}\}_{t\in\mathbb{R}}$ を生成する．各 $t \in \mathbb{R}$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して，作用素 $\psi(t, f)$ を

$$\psi(t, f) := \psi(e^{it\overline{h}_V/\hbar}\bar{f}) \tag{8.16}$$

によって定義する．

$\|e^{it\overline{h}_V/\hbar}\bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ であるから，任意の $\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，

$$\|\psi(t, f)\Psi\| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|N_{\mathrm{b}}^{1/2}\Psi\|.$$

したがって，例 7-3 と同様にして，対応：$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \ni f \longrightarrow \psi(t, f)$ は，$(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})), D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}))$ で働く，作用素値超関数である．

定理 8-1　任意の $f \in D(\overline{h}_V)$ と $\Psi \in D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ に対して，$\psi(t, f)\Psi$ は t について強微分可能であり，

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t, f)\Psi = \psi(t, \overline{h}_V f)\Psi \tag{8.17}$$

が成り立つ．

証明　補題 4-49 の単純な応用である．□

方程式 (8.17) は，de Broglie 場の方程式 (8.7) を空間変数 $\boldsymbol{x}$ について，関数 f で形式的に均したものとみなせる．象徴的に表せば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^d}\psi(t, \boldsymbol{x})\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x}) \right) \psi(t,\boldsymbol{x}) \right\} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

したがって，作用素値超関数 $\psi(t,f)$ は，量子化された de Broglie 場の 1 つの表現と見ることができる．

次に，量子化された de Broglie 場 $\psi(t,f)$ が時刻 0 の場 $\psi(0,f) = \psi(\bar{f})$ のハイゼンベルク作用素となるようなハミルトニアンを求める．結論から言えば，h_V の第 2 量子化

$$H_{\mathrm{dB}} := d\Gamma_{\mathrm{b}}(\overline{h}_V) \tag{8.18}$$

がそれである．実際，命題 4-46 を $U = e^{it\overline{h}_V/\hbar}$ として応用し，定理 4-17 (i) を用いると，

$$\psi(t,f) = e^{itH_{\mathrm{dB}}/\hbar}\psi(0,f)e^{-itH_{\mathrm{dB}}/\hbar} = e^{itH_{\mathrm{dB}}/\hbar}\psi(\bar{f})e^{-itH_{\mathrm{dB}}/\hbar} \tag{8.19}$$

が得られる．

1 粒子ハミルトニアン h_V が非負であれば，H_{dB} もそうであり，フォック真空 $\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}$ は H_{dB} の基底状態であり，基底状態エネルギーは 0 である．

H_{dB} のスペクトルについては，定理 4-14 を応用すればよい．特に，$\sigma(\overline{h}_V) \cap (-\infty, 0) \neq \varnothing$ ならば，H_{dB} は下に有界でない．

1 粒子のシュレーディンガー作用素 h_V は自然な仕方で n 粒子空間 $L^2(\mathbb{R}^{dn}_x)$ 上 ($x = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$) の線形作用素へと拡張される．すなわち，変数 $\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{R}^d$ に関する一般化されたラプラシアンを $\Delta_{\boldsymbol{x}_j}$ とし，

$$h_V^{(j)} := -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\boldsymbol{x}_j} + V(\boldsymbol{x}_j) \tag{8.20}$$

によって定義される作用素がそれである ($V(\boldsymbol{x}_j)$ は $\mathbb{R}^{dn}$ 上の関数としての $V(\boldsymbol{x}_j)$ によるかけ算作用素である)．

ハミルトニアン H_{dB} は，n 粒子部分空間 $\overset{n}{\underset{\mathrm{s}}{\otimes}} L^2(\mathbb{R}^d) = L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}})$ (自然な同一視) によって簡約される (命題 4-13)．この閉部分空間における部分を $H^{(n)}_{\mathrm{dB}}$ とすれば

$$H^{(n)}_{\mathrm{dB}} = \overline{\sum_{j=1}^{n} I \otimes \cdots I \otimes \underbrace{h_V}_{j\,\text{番目}} \otimes I \cdots \otimes I} \tag{8.21a}$$

$$= \overline{\sum_{j=1}^{n} h_V^{(j)}} \tag{8.21b}$$

となる (2 番目の等号は 8-2-1 項の始めに述べた規約の意味での等号)[5]. (8.21b) の右辺は, n 粒子のシュレーディンガー型ハミルトニアンである. 等式 (8.21b) は次のことを意味する : ハミルトニアン $\overline{\sum_{j=1}^{n} h_V^{(j)}}$ によって記述される n 粒子系の量子力学理論を QT_n とすれば, 上述の量子 de Broglie 場の理論は, 可算無限個の量子力学理論 $\mathrm{QT}_1, \mathrm{QT}_2, \cdots$ を一元的に統一する理論である. こうして, より高次の理念としての量子場の概念の有効性の一端が明らかになる.

8-2-4 自由な量子 de Broglie 場

$V = 0$ の場合の 1 粒子ハミルトニアン h_V を h_0 と記す :

$$h_0 := -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta. \tag{8.22}$$

これは自由な非相対論的量子的粒子のハミルトニアンである. したがって, $V = 0$ のときの量子 de Broglie 場 — **自由な量子 de Broglie 場** — は

$$\psi_{\mathrm{free}}(t, f) := \psi(e^{ith_0/\hbar}\bar{f}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}), \tag{8.23}$$

である.

自由な量子 de Broglie 場のハミルトニアンは, $V = 0$ の場合の H_{dB} :

$$H_{\mathrm{dB},0} := d\Gamma_{\mathrm{b}}(h_0) \tag{8.24}$$

によってあたえられる.

自由な量子 de Broglie 場は空間並進に対してユニタリ共変であることを示そう.

D_j を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ の第 j 成分 x_j に関する一般化された偏微分作用素とすると, $-i\hbar D_j$ は自己共役である. これは, 物理的には, 自由な量子的粒子の運動量作用素を表す. この作用素の第 2 量子化

$$P_j := d\Gamma_{\mathrm{b}}(-i\hbar D_j) \tag{8.25}$$

は自己共役であり, 物理的には, **自由な de Broglie 場の運動量作用素**を表す.

定理 4-17 (i) と命題 4-46 によって, 任意の $t \in \mathbb{R}$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して,

$$e^{-itP_j/\hbar}\psi(f)e^{itP_j/\hbar} = \psi(e^{-it(-iD_j)}f).$$

一方, $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の自己共役作用素の組 $(h_0, -i\hbar D_1, \cdots, -i\hbar D_d)$ は強可換である[6]. した

---

[5] 2 番目の等号の証明については, 新井-江沢 (1999b) の p.443, 例 4.8, 例 4.10 を参照.

[6] 新井 (1997a) の定理 4.11 を参照. h_0 と $-i\hbar D_j$ の強可換性は, フーリエ変換を使えば容易に示される.

がって，命題 4-20 によって，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ 上の自己共役作用素の組 $(H_{\mathrm{dB},0}, P_1, \cdots, P_d)$ は強可換である．ゆえに，任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$e^{-ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{-ia_d P_d/\hbar} \psi_{\text{free}}(t, f) e^{ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{ia_d P_d/\hbar}$$
$$= \psi_{\text{free}}(t, e^{-ia_1(-iD_1)/\hbar} \cdots e^{-ia_d(-iD_d)/\hbar} f).$$

そこで，(7.3b) を使えば，

$$\psi_{\text{free}}(t, f_{\boldsymbol{a}}) = e^{-ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{-ia_d P_d/\hbar} \psi_{\text{free}}(t, f) e^{ia_1 P_1/\hbar} \cdots e^{ia_d P_d/\hbar} \tag{8.26}$$

が得られる．ここで，

$$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{8.27}$$

ゆえに，時刻 t での自由な量子 de Broglie 場 $\psi_{\text{free}}(t, f)$ は空間並進に関して，ユニタリ共変である．しかも，このユニタリ共変性をあたえる，1 パラメータ強連続ユニタリ群の生成子は，確かに，場の運動量作用素と解釈できるものになっている．

作用素 $H_{\mathrm{dB},0}$ や P_j が運動量表示でのボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ でどうなるかを見よう．質量 $M > 0$，運動量 $\hbar \boldsymbol{k}$ の非相対論的自由粒子のエネルギーは

$$E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}) := \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2M}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{8.28}$$

によってあたえられる[7]．波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の関数としての運動量の j 成分を $\mathfrak{p}_j$ とする：

$$\mathfrak{p}_j(\boldsymbol{k}) := \hbar k_j. \tag{8.29}$$

関数 $E_{\mathrm{NR}}, \mathfrak{p}_j$ は $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ 上のかけ算作用素で自己共役なものを一意的に定義する．これらの第 2 量子化作用素を考える：

$$\hat{H}_{\mathrm{dB},0} := d\Gamma_{\mathrm{b}}(E_{\mathrm{NR}}), \quad \hat{P}_j := d\Gamma_{\mathrm{b}}(\mathfrak{p}_j). \tag{8.30}$$

定理 4-47 と偏微分作用素に対するフーリエ変換の公式[8]を使うことにより，

$$\Gamma(\mathscr{F}_d) H_{\mathrm{dB},0} \Gamma(\mathscr{F}_d)^{-1} = \hat{H}_{\mathrm{dB},0}, \quad \Gamma(\mathscr{F}_d) P_j \Gamma(\mathscr{F}_d)^{-1} = \hat{P}_j, \tag{8.31}$$

となることがわかる．これらの式は，運動量表示のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}\ (L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ においては，自由場のハミルトニアンと運動量がかけ算作用素の無限直和であたえられることを示す．この意味で，ハミルトニアンと運動量に関しては，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ で考察する方が扱いやすいことがわかる．

---

[7] “NR” は “non-relativistic” (非相対論的) の意．

[8] 新井 (1997a) の 5 章，5.4 節を参照．

場 $\psi(f)$ については，命題 4-46 によって，

$$\Gamma(\mathscr{F}_d)\psi(f)\Gamma(\mathscr{F}_d)^{-1} = a(\hat{f}) \tag{8.32}$$

である．ただし，$a(g)$ $(g \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上の消滅作用素である．

8-2-5 自由な量子 de Broglie 場のエネルギー・運動量スペクトル

(8.31), (8.32) とスペクトルのユニタリ不変性により，

$$\sigma(H_{\mathrm{dB},0}) = \sigma(\hat{H}_{\mathrm{dB},0}), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{dB},0}) = \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{H}_{\mathrm{dB},0}), \tag{8.33}$$

$$\sigma(P_j) = \sigma(\hat{P}_j), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(P_j) = \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{P}_j). \tag{8.34}$$

E_{NR}, $\mathfrak{p}_j$ は連続関数であるから，

$$\sigma(E_{\mathrm{NR}}) = \overline{\left\{ \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2M} \;\middle|\; \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \right\}} = [0, \infty), \quad \sigma(\mathfrak{p}_j) = \overline{\{\hbar k_j \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d\}} = \mathbb{R}, \tag{8.35}$$

である[9]．また，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(E_{\mathrm{NR}}) = \varnothing, \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\mathfrak{p}_j) = \varnothing, \tag{8.36}$$

もわかる[10]．これらの事実と定理 4-14 によって，$H_{\mathrm{dB},0}$, P_j のスペクトルは次のようになることがわかる：

$$\begin{aligned} \sigma(H_{\mathrm{dB},0}) &= \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}_l) \;\middle|\; \boldsymbol{k}_l \in \mathbb{R}^d, l = 1, \cdots, n \right\} \right) \\ &= [0, \infty), \end{aligned} \tag{8.37a}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{dB},0}) = \{0\}, \tag{8.37b}$$

$$\sigma(P_j) = \mathbb{R}, \quad \sigma_{\mathrm{p}}(P_j) = \{0\}, \quad j = 1, \cdots, d. \tag{8.38}$$

ここで，点 0 は，$H_{\mathrm{dB},0}$, P_j の同時固有値であり，その固有ベクトルは，定数倍を除いて，フォック真空 $\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}$ であたえられる．

次に

$$P_{\mathrm{dB},0} := (H_{\mathrm{dB},0}, P_1, \cdots, P_d) \tag{8.39}$$

---

[9] 新井 (1997a) の定理 2.25 (i) の応用.

[10] 前掲書の定理 2.25 (ii) の応用.

の結合スペクトル $\sigma_{\mathrm{J}}(P_{\mathrm{dB},0})$ がどうなるかを見ておこう．(8.31) によって，$\sigma_{\mathrm{J}}(P_{\mathrm{dB},0})$ は

$$\hat{P}_{\mathrm{dB},0} := (\hat{H}_{\mathrm{dB},0}, \hat{P}_1, \cdots, \hat{P}_d) \tag{8.40}$$

の結合スペクトルに等しい．そこで，こちらの方を調べる．

ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{dB},0}$ の，n 粒子部分空間 $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{k}})$ における簡約部分を $\hat{H}^{(n)}_{\mathrm{dB},0}$ とすれば，これは，関数

$$E_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) := \sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}_l) \tag{8.41}$$

によるかけ算作用素であるから，そのスペクトル測度は，$\{\chi_{E_n^{-1}(J)} \mid J \in \boldsymbol{B}^1\}$ である[11)]．また，$\hat{P}_j$ の n 粒子部分空間 $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{k}})$ における簡約部分を $\hat{P}^{(n)}_j$ とすれば，これは，関数

$$p^{(n)}_j(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) := \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{p}_j(\boldsymbol{k}_l) \tag{8.42}$$

によるかけ算作用素であるから，そのスペクトル測度は，$\{\chi_{p_j^{(n)-1}(J)} \mid J \in \mathbb{B}^1\}$ である．したがって，$\hat{H}_{\mathrm{dB},0}$ のスペクトル測度を $E_{\hat{H}_{\mathrm{dB},0}}$，$\hat{P}_j$ のそれを $E_{\hat{P}_j}$ とすれば，

$$E_{\hat{H}_{\mathrm{dB},0}}(J) = \chi_0(J) \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n^{-1}(J)} \right), \tag{8.43}$$

$$E_{\hat{P}_j}(J) = \chi_0(J) \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \chi_{p_j^{(n)-1}(J)} \right), \quad J \in \boldsymbol{B}^1, \tag{8.44}$$

となる．ただし，$\chi_0(J)$ は，$0 \in J$ ならば，$\chi_0(J) = 1$，$0 \notin J$ ならば，$\chi_0(J) = 0$ をみたす複素数である．

$$\boldsymbol{p}^{(n)} := (p^{(n)}_1, \cdots, p^{(n)}_d) \tag{8.45}$$

とおく．

各 $n \geq 1$ に対して，写像 $F_n : (\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})^n \longrightarrow \mathbb{R}^{1+d}$ を

$$\begin{aligned} F_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) &:= (E_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n), \boldsymbol{p}^{(n)}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}_l), \sum_{l=1}^{n} \hbar \boldsymbol{k}_l \right), \quad (\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) \in (\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})^n, \end{aligned} \tag{8.46}$$

[11)] $\boldsymbol{B}^1$ は 1 次元ボレル集合体を表す．一般に，集合 X から集合 Y への写像 $T : X \longrightarrow Y$ について，Y の部分集合 K に対する，T の逆像を $T^{-1}(K)$ と記す：$T^{-1}(K) := \{x \in X \mid T(x) \in K\}$．集合 S に対して，χ_S は S の定義関数を表す．これによるかけ算作用素も同じ記号で表す．ここで主張された事実は，新井 (1997a) の 3 章の練習問題 10 と同様の仕方で証明できる．

によって定義する．任意のボレル集合 $B \in \mathbb{B}^1$ (d 次元ボレル集合体) に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上の作用素 $E_{\mathrm{dB}}(B)$ を

$$E_{\mathrm{dB}}(B) := \chi_0(B) \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \chi_{F_n^{-1}(B)} \right) \tag{8.47}$$

によって定義する．このとき，E_{dB} は $1+d$ 次元のスペクトル測度であることがわかる[12]．

任意の 1 次元ボレル集合 J_i $(i = 1, \cdots, d)$ に対して

$$\begin{aligned} &E_{\mathrm{dB}}(J_0 \times J_1 \times \cdots \times J_d) \\ &= [\chi_0(J_0) \cdots \chi_0(J_d)] \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n^{-1}(J_0)} \prod_{j=1}^{d} \chi_{p_j^{(n)-1}(J_j)} \right) \\ &= E_{\hat{H}_{\mathrm{dB},0}}(J_0) \prod_{j=1}^{d} E_{\hat{P}_j}(J_j). \end{aligned}$$

したがって，E_{dB} は $\hat{P}_{\mathrm{dB},0}$ の結合スペクトル測度である．E_{dB} の定義から，

$$\mathscr{P}_n := \left\{ \left(\sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}_l), \sum_{l=1}^{n} \hbar \boldsymbol{k}_l \right) \,\middle|\, \boldsymbol{k}_l \in \mathbb{R}^d,\, l = 1, \cdots, n \right\}, \quad n \geq 1, \tag{8.48}$$

とすれば，

$$\operatorname{supp} E_{\mathrm{dB}} = \{0\} \cup \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathscr{P}_n} \right)} \tag{8.49}$$

であることがわかる．$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{P}_{\mathrm{dB},0}) = \operatorname{supp} E_{\mathrm{dB}}$ であるから，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{P}_{\mathrm{dB},0}) = \{0\} \cup \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathscr{P}_n} \right)} \tag{8.50}$$

が得られる．右辺の集合をもっとはっきりさせよう．

容易にわかるように，

$$\mathscr{P}_1 = \left\{ (p_0, \boldsymbol{p}) \,\middle|\, p_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M},\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d \right\} \tag{8.51}$$

である．つまり，$\mathscr{P}_1$ は放物面である．これは，質量 M の非相対論的自由粒子 1 個がとりうるエネルギー・運動量の全体である．

$n \geq 2$ の場合の $\mathscr{P}_n$ は，

$$\mathscr{P}_n = \left\{ (p_0, \boldsymbol{p}) \,\middle|\, p_0 \geq \frac{\boldsymbol{p}^2}{2Mn},\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d \right\} \tag{8.52}$$

---

[12] 新井 (1997a) の 3 章の練習問題 10 と同様の仕方で証明できる．

となる．

(8.52) の証明　次の不等式に注意する：任意の $n \geq 2$ と $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-1} \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\frac{\boldsymbol{p}^2}{n} \leq \left(\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right)^2 + \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l^2. \tag{8.53}$$

実際，三角不等式によって，

$$|\boldsymbol{p}| \leq \left|\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right| + \left|\sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right| \leq \left|\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right| + \sum_{l=1}^{n-1} |\boldsymbol{p}_l|. \tag{8.54}$$

コーシー-シュヴァルツの不等式を応用することにより，任意の $s_l \geq 0$ $(l = 1, \cdots, N)$ に対して，

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{l=1}^{N} s_l\right)^2 \leq \sum_{l=1}^{N} s_l^2 \tag{8.55}$$

が成り立つ．これを (8.54) の右辺に使えば，

$$\frac{1}{n}|\boldsymbol{p}|^2 \leq \left|\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right|^2 + \sum_{l=1}^{n-1} |\boldsymbol{p}_l|^2$$

を得る．すなわち，(8.53) が成立する．

さて，$n \geq 2$, $(p_0, \boldsymbol{p}) \in \mathscr{P}_n$ としよう．このとき，ある $\boldsymbol{k}_l \in \mathbb{R}^d$ $(l = 1, \cdots, n)$ を用いて，

$$p_0 = E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n), \quad \boldsymbol{p} = \sum_{l=1}^{n} \hbar \boldsymbol{k}_l,$$

と表される．したがって，$\boldsymbol{p}_l = \hbar \boldsymbol{k}_l$ $(l = 1, \cdots, n-1)$ とおけば，

$$p_0 = \frac{1}{2M}\left(|\boldsymbol{p}_1|^2 + \cdots + |\boldsymbol{p}_{n-1}|^2 + \left|\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right|^2\right)$$

と書ける．これと (8.53) により，

$$p_0 \geq \frac{1}{2Mn}\boldsymbol{p}^2$$

が成立する．ゆえに，$\mathscr{P}_n$ は (8.52) の右辺の集合に含まれる．

逆に，$(p_0, \boldsymbol{p})$ を (8.52) の右辺の集合の点とすれば，$p_0 \geq \boldsymbol{p}^2/(2Mn)$．$\mathbb{R}^{d(n-1)}$ 上の関数

$$f(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_{n-1}) := \frac{\left(\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l\right)^2 + \sum_{l=1}^{n-1} \boldsymbol{p}_l^2}{2M}$$

は連続であり，(8.53) により，その値域は，$[\boldsymbol{p}^2/(2Mn),\infty)$ である[13]．したがって，$p_0 = f(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-1})$ をみたす $\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-1}$ がある．そこで，$\boldsymbol{k}_l = \boldsymbol{p}_l/\hbar$ $(l = 1,\cdots,n-1)$, $\boldsymbol{k}_n = \left(\boldsymbol{p} - \sum_{l=1}^{n-1}\boldsymbol{p}_l\right)\Big/\hbar$ とおけば，$p_0 = E_{\mathrm{NR}}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n)$ となるので，$(p_0,\boldsymbol{p}) \in \mathscr{P}_n$ である．すなわち，(8.52) の右辺の集合は $\mathscr{P}_n$ に含まれることが示された．

以上から，(8.52) が成立する． □

(8.51), (8.52) によって，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{P}_{\mathrm{dB},0}) = \{0\} \cup \left\{(p_0,\boldsymbol{p}) \;\middle|\; p_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M},\, \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d\right\}$$
$$\cup\, \overline{\left(\bigcup_{n=2}^{\infty}\left\{(p_0,\boldsymbol{p}) \;\middle|\; p_0 \ge \frac{\boldsymbol{p}^2}{2Mn},\, \boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d\right\}\right)}$$
$$= [0,\infty)\times\mathbb{R}^d. \tag{8.56}$$

こうして，$\hat{P}_{\mathrm{dB},0}$ の結合スペクトル，すなわち，自由な量子 de Broglie 場のエネルギー・運動量スペクトルが明らかにされる．(8.56) は，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(\hat{P}_{\mathrm{dB},0}) = \sigma(\hat{H}_{\mathrm{dB},0})\times\sigma(\hat{P}_1)\times\cdots\times\sigma(\hat{P}_d) \tag{8.57}$$

であることを示している．

8-3 節　消滅作用素の作用素値超関数核

消滅作用素の作用素値超関数核 $\psi(\boldsymbol{x})$ は，実は，作用素として意味をもつことを示し，これと関連する事柄を論じる．

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ の部分空間

$$D_{\mathscr{S}} := \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))\,|\,\Psi^{(n)}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}}),\, n\ge 1\} \tag{8.58}$$

は稠密である．各 $\boldsymbol{x}$ に対して，$D_{\mathscr{S}}$ を定義域とする作用素 $\psi(\boldsymbol{x})$ を

$$(\psi(\boldsymbol{x})\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n) := \sqrt{n+1}\,\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n),$$
$$\Psi\in D_{\mathscr{S}},\, n\ge 0, \tag{8.59}$$

によって定義する．これを点 $\boldsymbol{x}$ での**消滅作用素**とよぶ．容易にわかるように，$\psi(\boldsymbol{x})$ は

---

[13] (8.53) において，等号は，たとえば，$\boldsymbol{p}_l = \boldsymbol{p}/n$ $(l = 1,\cdots,n-1)$ のときに成立する．

$D_{\mathscr{S}}$ を不変にする．だが，次の命題が示すように，この作用素はある意味で特異である．

命題 8-2　すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$D(\psi(\boldsymbol{x})^*) = \{0\}$．特に，$\psi(\boldsymbol{x})$ は可閉でない．

証明　$\boldsymbol{\Phi} \in D(\psi(\boldsymbol{x})^*)$ とする．このとき，$\boldsymbol{\Phi} = 0$ であることを示せばよい．$\Theta := \psi(\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{\Phi}$ とおけば，すべての $\boldsymbol{\Psi} \in D(\psi(\boldsymbol{x}))$ に対して，$\langle \boldsymbol{\Phi}, \psi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\Psi}\rangle = \langle \Theta, \boldsymbol{\Psi}\rangle$．いま，$\boldsymbol{\Psi}$ として，$n+1$ 番目の成分のみが 0 でないベクトルを選ぶと，

$$\sqrt{n+1}\int_{(\mathbb{R}^d)^n} \boldsymbol{\Phi}^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)^* \boldsymbol{\Psi}^{(n+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\, d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_n$$

$$= \langle \Theta^{(n+1)}, \boldsymbol{\Psi}^{(n+1)}\rangle.$$

そこで，特に，$f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ $(j = 1, \cdots, n+1)$ を任意に選び，$\boldsymbol{\Psi}^{(n+1)} = S_{n+1}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n+1})$ を考えると，

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=1}^{n+1} f_j(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{\Phi}^{(n)}, S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{j-1} \otimes f_{j+1} \otimes \cdots \otimes f_{n+1})\rangle$$

$$= \langle \Theta^{(n+1)}, \boldsymbol{\Psi}^{(n+1)}\rangle.$$

シュヴァルツの不等式と $\|\boldsymbol{\Psi}^{(n+1)}\| \le \|f_1\| \cdots \|f_{n+1}\|$ によって，

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\sum_{j=1}^{n+1} f_j(\boldsymbol{x})\right| \left|\langle \boldsymbol{\Phi}^{(n)}, S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{j-1} \otimes f_{j+1} \otimes \cdots \otimes f_{n+1})\rangle\right|$$

$$\le \|\Theta^{(n+1)}\|\,\|f_1\| \cdots \|f_{n+1}\|. \tag{8.60}$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ によって，$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数でその台が有界なものの全体を表す．

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元 u で

$$\operatorname{supp} u \subset \{\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{x}'| \le 1\}, \quad u \ge 0,\, u(0) = 1,\, \int_{\mathbb{R}^d} u(\boldsymbol{x}')\, d\boldsymbol{x}' = 1,$$

をみたすものをとり，$s > 0$ に対して，関数 g_s を

$$g_s(\boldsymbol{x}') := s^{d/2} u(s(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}))^{1/2}, \quad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^d,$$

によって定義する．このとき，$g_s \in L^2(\mathbb{R}^d)$ であり，$\|g_s\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ が成り立つ．さらに，任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，変数変換 $\boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})$ により，

$$\langle f, g_s\rangle = s^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} f\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{y}}{s}\right)^* u(\boldsymbol{y})^{1/2}\, d\boldsymbol{y}.$$

したがって，$M := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|$ とおけば，$M < \infty$ であり，

$$|\langle f, g_s\rangle| \le s^{-d/2} M \int_{\mathbb{R}^d} u(\boldsymbol{y})^{1/2}\, d\boldsymbol{y} \longrightarrow 0, \quad s \longrightarrow \infty.$$

ゆえに，$\lim_{s\to\infty} \langle f, g_s\rangle = 0$．$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であるから，付録 A の命題 A-1 を応用することにより，w-$\lim_{s\to\infty} g_s = 0$．これから，任意の $\Xi \in \otimes_{\rm s}^n L^2(\mathbb{R}^d)$ と $h_j \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $(j = 1, \cdots, n-1)$ に対して，

$$\lim_{s\to\infty} \langle \Xi, S_n(g_s \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_{n-1})\rangle = 0$$

を証明することができる[14]．

さて，(8.60) において，$f_1 = g_s$ にとる．このとき，すぐ上の式によって，

$$\lim_{s\to\infty} \langle \Phi^{(n)}, S_n(g_s \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_{j-1} \otimes f_{j+1} \otimes \cdots \otimes f_{n+1})\rangle = 0, \quad j \ge 3.$$

一方，$g_s(\boldsymbol{x}) = s^{d/2} \longrightarrow \infty$ $(s \longrightarrow \infty)$．したがって，もし，$\langle \Phi^{(n)}, S_n(f_2 \otimes \cdots \otimes f_{n+1})\rangle \neq 0$ ならば，(8.60) の左辺は，$s \longrightarrow \infty$ のとき，無限大に発散する．一方，(8.60) の右辺は，s によらず，$\|\Theta^{(n+1)}\|\,\|f_2\| \cdots \|f_{n+1}\|$ に等しいから，これは矛盾である．したがって，$\langle \Phi^{(n)}, S_n(f_2 \otimes \cdots \otimes f_{n+1})\rangle = 0$ でなければならない．$f_2, \cdots, f_{n+1}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ の任意の元であり，$S_n\left(\hat{\otimes}^n L^2(\mathbb{R}^d)\right)$ は $\otimes_{\rm s}^n L^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密であるから，$\Phi^{(n)} = 0$ でなければならない．$\Phi^{(0)} = 0$ も容易に示される．したがって，$\Phi = 0$．ゆえに $D(\psi(\boldsymbol{x})^*) = \{0\}$．この結果は，特に，$D(\psi(\boldsymbol{x})^*)$ が稠密でないことを意味するから，補題 2-1 によって，$\psi(\boldsymbol{x})$ は可閉ではない．□

注意 8-1　$\psi(\boldsymbol{x})^*$ の形式的な作用は

$$(\psi(\boldsymbol{x})^*\Psi)^{(0)} = 0, \tag{8.61a}$$

$$(\psi(\boldsymbol{x})^*\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j) \Psi^{(n-1)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{x}}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n), \quad \Psi \in D_{\mathscr{S}},\ n \ge 1, \tag{8.61b}$$

となることは容易にわかる．この形式的表示は次のようなことを示唆する：$\mathscr{S}'_{\rm sym}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}})$

---

[14] これも，まず，Ξ が $S_n\left(\hat{\otimes}^n L^2(\mathbb{R}^d)\right)$ (代数的対称テンソル積) の場合に証明し，$S_n\left(\hat{\otimes}^n L^2(\mathbb{R}^d)\right)$ の稠密性と付録 A の命題 A-1 を用いて，任意の $\Xi \in \otimes_{\rm s}^n L^2(\mathbb{R}^d)$ に拡張すればよい．

を $(\mathbb{R}_x^d)^n$ 上の対称な緩増加超関数[15] の全体からなる空間とし,

$$D'_{\mathscr{S}} := \mathbb{C} \oplus \left(\hat{\bigoplus_{n=1}^{\infty}} \mathscr{S}'_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{dn}) \right)$$

(代数的無限直和) とすれば, (8.61b) の右辺は, $\mathscr{S}'_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ の元であるから, $\psi(\boldsymbol{x})^*$ は, $D_{\mathscr{S}}$ から $D'_{\mathscr{S}}$ への作用素としては数学的に意味をもつということである. このアイデアは, 近年のホワイトノイズ解析において深い発展を見ている (Obata (1994)).

命題 8-3　任意の $\Psi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して, $\mathbb{R}^d$ 上のベクトル値関数 : $\boldsymbol{x} \longrightarrow \psi(\boldsymbol{x})\Psi$ は強連続である.

証明　任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\begin{aligned} &\|\psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t})\Psi - \psi(\boldsymbol{x})\Psi\|^2 \\ &= \sum_n (n+1) \int_{(\mathbb{R}^d)^n} |\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) - \Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)|^2 \\ &\quad \times d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_n. \end{aligned}$$

ここで, n に関する和は有限個の項だけにわたる. したがって, 右辺の各項が $\boldsymbol{t} \longrightarrow 0$ のとき, 0 に収束することを示せばよい.

$$\begin{aligned} &\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) - \Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \\ &= \int_0^1 ds \, \frac{d\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)}{ds} \\ &= \sum_{l=1}^d \int_0^1 ds \, t_l \, \Phi_l^{(n+1)}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n). \end{aligned}$$

ただし,

$$\Phi_l(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+1}) := \frac{\partial \Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+1})}{\partial x_{1l}}, \quad \boldsymbol{x}_j := (x_{j1}, \cdots, x_{jd}).$$

$\Phi_l^{(n+1)}$ も $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d(n+1)})$ の元であるから,

$$|\Phi_l^{(n+1)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+1})| \le \frac{C}{(1+|\boldsymbol{x}_1|^2 + \cdots + |\boldsymbol{x}_{n+1}|^2)^N}$$

となる定数 N と C で

[15] ϕ が $(\mathbb{R}^d)^n$ 上の**対称な緩増加超関数**であるとは, 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{dn})$ に対して, $\phi(f) = \phi(f_\sigma)$ が成立するときをいう. ただし, $f_\sigma(x_1, \cdots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ ($x_j \in \mathbb{R}^d$).

$$D_N := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{x}_{n+1}|^2)^{2N}}\, d\boldsymbol{x}_2\cdots d\boldsymbol{x}_{n+1} < \infty$$

をみたすものがとれる．したがって，

$$\left|\sum_{l=1}^{d}\int_0^1 ds\ t_l \Phi_l^{(n+1)}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\right| \le \frac{dC|\boldsymbol{t}|}{(1+|\boldsymbol{x}_1|^2+\cdots+|\boldsymbol{x}_n|^2)^N}.$$

ゆえに，

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^n} |\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) - \Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)|^2\, d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n$$

$$\le (dC|\boldsymbol{t}|)^2 D_N \longrightarrow 0, \quad |\boldsymbol{t}| \longrightarrow 0.$$

よって題意が成立する． □

$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数の全体を $C(\mathbb{R}^d)$ で表す．命題 8-3 によって，任意の $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ と $\Psi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ に値をとる (強収束の意味での) リーマン積分

$$\left(\text{s-}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\right)\Psi := \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{x})\Psi\, d\boldsymbol{x} \tag{8.62}$$

が定義される．実際，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|f(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{x})\Psi\|\, d\boldsymbol{x} \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\psi(\boldsymbol{x})\Psi\|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\|\Psi^{(n+1)}\|^2\right)^{1/2}$$
$$< \infty$$

($\Psi \in D_{\mathscr{S}}$ により，和をとる項の数は，実際には有限個であることに注意) であるから，確かに上の積分は存在する[16]．任意の $\Phi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ に対して，

$$\left\langle \Phi, \left(\text{s-}\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})^*\, d\boldsymbol{x}\right)\Psi \right\rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \langle \Phi, \psi(\boldsymbol{x})\Psi\rangle f(\boldsymbol{x})^*\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \sum_n \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x} f(\boldsymbol{x})^*$$

[16] ヒルベルト空間値関数のリーマン積分については，新井 (1997a) の 4 章，4.3 節に簡単な解説がある．

$$\times\left(\int_{(\mathbb{R}^d)^n}\boldsymbol{\Phi}^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)^*\boldsymbol{\Psi}^{(n+1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\,d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n\right)$$

$$=\langle\Phi,\psi(f)\Psi\rangle.$$

ここで，最後の等式を得る際に，フビニの定理 (積分の順序交換) と $\psi(f)$ の表式 (8.13a) を用いた．したがって，$D_{\mathscr{S}}$ 上で，

$$\psi(f)=\text{s-}\int_{\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},\qquad f\in C(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d),\tag{8.63}$$

が成立する．すなわち，$\psi(f)$ ($f\in C(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R}^d)$) は，作用する定義域を $D_{\mathscr{S}}$ に制限すれば，$\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}$ の各点で定義された消滅作用素 $\psi(\boldsymbol{x})$ を f で均したものとして構成される．

注意 8-2 (8.63) の右辺における積分の意味を，Bochner 積分 (付録 E を参照) の意味でとるならば，$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ でよい．この場合にも，(8.63) が成立する．

8-4 節　量子 de Broglie 場の自己相互作用

一般に，古典場の自己相互作用は，場の方程式に現われる形では，場に関して次数が 2 以上の多項式によってあたえられる．古典的な de Broglie 場に対する方程式 (8.1) は，場の自己相互作用項を含んでいない．自己相互作用を含む古典的な de Broglie 場の方程式の基本的な例として，

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{j=1}^d\frac{\partial^2\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j^2}+V(\boldsymbol{x})\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})+\lambda\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})^*\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})^2\tag{8.64}$$

がある．ここで，$\lambda\in\mathbb{R}$ は**結合定数** (coupling constant) とよばれるパラメータであり，右辺の最後の項が自己相互作用項を表す．これに対応する古典的ハミルトニアンは

$$H_{\text{cl}}=\int_{\mathbb{R}^d}d\boldsymbol{x}\left\{\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})^*\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta+V(\boldsymbol{x})\right)\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})+\frac{\lambda}{2}\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})^{*2}\Psi_{\text{cl}}(t,\boldsymbol{x})^2\right\}$$

である．右辺の最後の項が，場の自己相互作用エネルギーを表す．8-1 節の場合と同様に，この例の H_{cl} も時間 t によらないことが示されるので，時刻 0 の場 $\psi_{\text{cl}}(\boldsymbol{x}):=\Psi_{\text{cl}}(0,\boldsymbol{x})$ を用いて，

$$H_{\text{cl}}=H_0^{\text{cl}}+\lambda H_I^{\text{cl}}\tag{8.65}$$

と書ける．ただし，

$$H_0^{\mathrm{cl}} := \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x})^* \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x}) \right) \psi_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x}), \tag{8.66}$$

$$H_I^{\mathrm{cl}} := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x})^{*2} \psi_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x})^2. \tag{8.67}$$

H_0^{cl} を**無摂動項** (unperturbed part)，H_I^{cl} を**摂動項** (perturbation) という．

この例の量子版をつくることを考える．無摂動項に対応する作用素は，自己相互作用項がない場合と同じ形なので，これについては，作業仮説として，(8.18) で定義される自己共役作用素 H_{dB} を採用することができる．他方，摂動項に対応する作用素は，$\psi_{\mathrm{cl}}(\boldsymbol{x})$ のところに，量子 de Broglie 場の核 $\psi(\boldsymbol{x})$ を形式的にいれた対象 "$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\boldsymbol{x})^{*2}\psi(\boldsymbol{x})^2\, d\boldsymbol{x}/2$" になるが，これが作用素として，数学的に意味をもつかどうかは疑問である．なぜなら，すでに見たように，$\psi(\boldsymbol{x})^*$ はボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ 上の作用素としては自明なものであるからである (命題 8-2).

こうして，量子 de Broglie 場の相互作用を数学的に厳密に記述するには，$\psi(\boldsymbol{x})^*$, $\psi(\boldsymbol{x})$ の多項式の "積分" に対して，何らかの意味がつけられるかどうかをまず調べる必要が生じる．

注意 8-3 (8.59) と $\psi(\boldsymbol{x})^*$ に対する形式的な表示 (8.61b) を用いると，任意の $\Psi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，

$$\begin{aligned}&(\psi(\boldsymbol{x})^{*2}\psi(\boldsymbol{x})^2\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\\ &= \sum_{i\neq j}^{n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\Psi^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{x}}_i, \cdots, \hat{\boldsymbol{x}}_j, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\end{aligned}$$

となるので，形式的に，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^{*2}\psi(\boldsymbol{x})^2\Psi \right)^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \left(\sum_{i\neq j}^{n} \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) \right)\Psi^{(n)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n).$$

つまり，"$\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^{*2}\psi(\boldsymbol{x})^2$" は，それを，$n$ 粒子部分空間に制限した場合，デルタ超関数 $\sum_{i\neq j}^{n} \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$ をかける作用素であるが，明らかに，この作用素は，フォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ 上では意味をもたない．いまの議論は，フォック空間上で，シンボル "$\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^{*2}\psi(\boldsymbol{x})^2$" に対応する作用素が存在しないことを示唆する．

ちなみに，デルタ超関数 $\sum_{i \neq j}^{n} \delta(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)$ をかける作用素で記述される相互作用は，**デルタ相互作用**とよばれる．

8-4-1　生成・消滅作用素の核から定まる準双線形形式

次に進む前に，ある一般的な概念を導入する．

$\mathscr{X}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{D}$ を $\mathscr{X}$ の部分空間とする．q が $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ 上の準双線形形式 (1 章，注意 1-1 を参照) であるとき，q は，**$\mathscr{D}$ を定義域とする，$\mathscr{X}$ 上の準双線形形式**，あるいは単に **$\mathscr{D}$ 上の準双線形形式**といわれる．この場合，$\mathscr{D}$ を q の**形式定義域** (form domain) といい，$\mathscr{D} = Q(q)$ と記す．

任意の $\Psi, \Phi \in Q(q)$ に対して，$q(\Psi, \Phi)^* = q(\Phi, \Psi)$ が成り立つとき，q は**エルミート**であるという．エルミートな準双線形形式を**エルミート形式**という．稠密な形式定義域をもつエルミート形式を**対称形式**という．

量子物理学への応用においては，対称形式が特に重要である．

さて，本論にもどる．以下では，まず，$\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn}$ 上の任意の緩増加超関数 F に対して ($m, n \in \mathbb{N}$)，シンボル

$$\int_{\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1 \cdots d\boldsymbol{y}_n \, F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$$

$$\times \psi(\boldsymbol{x}_1)^* \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m)^* \psi(\boldsymbol{y}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{y}_n)$$

が $D_{\mathscr{S}}$ を形式定義域とする準双線形形式として意味をもつこと示す．

各 $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，$\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn}$ 上の関数 $K_{\Psi,\Phi}$ を

$$K_{\Psi,\Phi}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) := \langle \psi(\boldsymbol{x}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{x}_n) \Psi, \psi(\boldsymbol{y}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{y}_n) \Phi \rangle,$$
$$(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \in \mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn}, \quad (8.68)$$

によって定義する．

補題 8-4　$K_{\Psi,\Phi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn})$.

証明　(8.59) を繰り返し使うことにより，任意の $p \geq 0$ に対して，

$$(\psi(\boldsymbol{x}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m) \Psi)^{(p)}(\boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p)$$
$$= \sqrt{(p+1) \cdots (p+m)} \Psi^{(p+m)}(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p) \qquad (8.69)$$

(置換対称性により，右辺の変数 $\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p$ の順序は任意でよい).
したがって，

$$
\begin{aligned}
&K_{\Psi,\Phi}(\boldsymbol{x}_1, \cdots \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \\
&= \sum_{p\geq 0} \sqrt{(p+1)\cdots(p+m)}\sqrt{(p+1)\cdots(p+n)} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^{dp}} \Psi^{(p+m)}(\boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m-1}, \cdots, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p)^* \\
&\qquad\quad \times \Phi^{(p+n)}(\boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{y}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p)\, d\boldsymbol{x}'_1 \cdots d\boldsymbol{x}'_p.
\end{aligned}
$$

ここで，p についての和は有限個であることに注意．したがって，右辺の各項が $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$ の関数として，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn})$ の元であることを示せばよい．

このための基本的なアイデアを示すために，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ として，$g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$ によって定義される関数 g が $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ の元であることを示そう．f の x に関する偏微分 $\partial_x f(x,y)$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ の元であるから，任意の $N \geq 1$ に対して，

$$
|\partial_x f(x,y)| \leq \frac{C_N}{(1+x^2+y^2)^N} \leq \frac{C_N}{(1+y^2)^N}
$$

となる定数 C_N がある．最右辺は x によらない，y について可積分な関数である．したがって，微分と積分の順序交換に関する基本的定理[17)]によって，g は微分可能であり，$dg(x)/dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(x,y)\, dy$ が得られる．以下，同様にして，g は何回でも微分することができ，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$g^{(n)}(x) := d^n g(x)/dx^n = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^n f(x,y)\, dy$ となることが示される．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$
|x|^m |g^{(n)}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^m |\partial_x^n f(x,y)|\, dy.
$$

関数 $x^m \partial_x^n f(x,y)$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ の元であるから，$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m |\partial_x^n f(x,y)| = 0$ であり，任意の $N \geq 1$ に対して，

$$
|x|^m |\partial_x^n f(x,y)| \leq \frac{C'_N}{(1+x^2+y^2)^N} \leq \frac{C'_N}{(1+y^2)^N}
$$

となる定数 C'_N がある．最右辺は x によらない，y について可積分な関数である．し

---

17) たとえば，新井 (1997a) の付録の定理 A.4.

たがって，ルベーグの優収束定理により，$\int_{\mathbb{R}} |x|^m |\partial_x^n f(x,y)|\, dy \longrightarrow 0\ (|x| \longrightarrow \infty)$ となる．ゆえに，$|x|^m |g^{(n)}(x)| \longrightarrow 0\ (|x| \longrightarrow \infty)$．以上から，$g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$．

今の方法を多変数の場合に拡張するのは容易である．こうして，題意が示される．□

$F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn})$ とする．補題 8-4 によって，任意の $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，$L_F(\Psi, \Phi)$ を

$$
\begin{aligned}
L_F(\Psi, \Phi) &:= F(K_{\Psi,\Phi}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{dm} \times \mathbb{R}^{dn}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1 \cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \\
&\quad \times \langle \psi(\boldsymbol{x}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m)\Psi, \psi(\boldsymbol{y}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{y}_n)\Phi \rangle \qquad (8.70)
\end{aligned}
$$

が定義される (最後の式は象徴的な記法である)．容易にわかるように，L_F は $D_{\mathscr{S}}$ を形式定義域とする準双線形形式である．この準双線形形式を記号的に

$$
L_F = \int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1 \cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \times \psi(\boldsymbol{x}_1)^* \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m)^* \psi(\boldsymbol{y}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{y}_n)
$$

と記す．これはあくまで便宜上の記法であって，右辺が文字どおりに積分として意味をもつということではない．単に書き方の問題であるが，

$$
L_F = \int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1 \cdots d\boldsymbol{y}_n\, \psi(\boldsymbol{x}_1)^* \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m)^* \times F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n) \psi(\boldsymbol{y}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{y}_n)
$$

のように書く場合もある．

L_F がいつ対称形式になるかを調べよう．

命題 8-5　$F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{d(m+n)})$ $(F \neq 0)$ とする．このとき，L_F がエルミートであるための必要十分条件は，$m = n$ かつ超関数の意味で

$$
F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)^* = F(\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \qquad (8.71)
$$

が成り立つことである．

注意 8-4　L_F は稠密に定義されているから $(Q(L_F) := D_{\mathscr{S}})$，この命題は，実は，$L_F$ が対称形式であるための必要十分条件をあたえる．

証明　(必要性) L_F がエルミートならば，任意の $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，$L_F(\Psi,\Phi)^* = L_F(\Phi,\Psi)$．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)^*$$

$$\times \langle \psi(\boldsymbol{y}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{y}_n)\Phi, \psi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{x}_m)\Psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)$$

$$\times \langle \psi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{x}_m)\Phi, \psi(\boldsymbol{y}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{y}_n)\Psi\rangle. \tag{8.72}$$

$r \geq m+1$ ならば，$\Psi^{(r)} = 0$ をみたす $\Psi \in D_{\mathscr{S}}$ をとれば，(8.69) によって，$l \geq 1$ ならば，$(\psi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{x}_m)\Psi)^{(l)} = 0$．また，$n > m$ ならば，$\psi(\boldsymbol{y}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{y}_n)\Psi = 0$．したがって，$n > m$ ならば，(8.72) の右辺は 0 になるので，

$$\int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)^*$$

$$\times \Phi^{(n)}(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)^*\Psi^{(m)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m) = 0$$

を得る．これは $F = 0$ を意味する．だが，これは，仮定 $F \neq 0$ に反する．Φ, Ψ の役割を交換して考えれば，同様にして，$m < n$ ならば，$F = 0$ がしたがうので矛盾となる．したがって，$m = n$ でなければならない．このとき，上述のように Ψ を選べば，

$$\int_{\mathbb{R}^{d(n+n)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)^*$$

$$\times \Phi^{(n)}(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)^*\Psi^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots\boldsymbol{x}_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{d(n+n)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n\, F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)$$

$$\times \Phi^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)^*\Psi^{(n)}(\boldsymbol{y}_1,\cdots\boldsymbol{y}_n).$$

右辺で変数変換：$\boldsymbol{x}_j \longrightarrow \boldsymbol{y}'_j$, $\boldsymbol{y}_j \longrightarrow \boldsymbol{x}'_j$ をして比較すれば，(8.71) が得られる．

(十分性) (8.71) が成り立つとすれば，任意の $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，

$$L_F(\Psi,\Phi)^*$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2dn}} F(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n)^* \langle \psi(\boldsymbol{y}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{y}_n)\Phi, \psi(\boldsymbol{x}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{x}_n)\Psi\rangle$$

$$\times d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n\, d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2dn}} F(\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \langle \psi(\boldsymbol{y}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{y}_n) \Phi, \psi(\boldsymbol{x}_1) \cdots \psi(\boldsymbol{x}_n) \Psi \rangle$$

$$\times\, d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_n \, d\boldsymbol{y}_1 \cdots d\boldsymbol{y}_n$$

$$= L_F(\Phi, \Psi).$$

したがって，L_F はエルミートである．□

準双線形形式 L_F において，F がある種の特別な形であたえられる場合を考える．$i_k \neq j_k$ $(k = 1, \cdots, p,\, 2p < m+n,\, 1 \leq i_k,\, j_k \leq m+n)$ として，超関数 $F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+n}) \delta(\boldsymbol{x}_{i_1} - \boldsymbol{x}_{j_1}) \cdots \delta(\boldsymbol{x}_{i_p} - \boldsymbol{x}_{j_p})$ が緩増加超関数であるとき[18]，これに対する準双線形形式

$$\int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_{m+n} \, F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+n}) \delta(\boldsymbol{x}_{i_1} - \boldsymbol{x}_{j_1}) \cdots \delta(\boldsymbol{x}_{i_p} - \boldsymbol{x}_{j_p})$$

$$\times\, \psi(\boldsymbol{x}_1)^* \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m)^* \psi(\boldsymbol{x}_{m+1}) \cdots \psi(\boldsymbol{x}_{m+n})$$

は，これを形式的に $d\boldsymbol{x}_{j_1} \cdots d\boldsymbol{x}_{j_p}$ で積分した形

$$\int_{\mathbb{R}^{d(m+n-p)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots \widehat{d\boldsymbol{x}_{j_1}} \cdots \widehat{d\boldsymbol{x}_{j_p}} \cdots d\boldsymbol{x}_{m+n}$$

$$\times \left[F(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m+n}) \psi(\boldsymbol{x}_1)^* \cdots \psi(\boldsymbol{x}_m)^* \psi(\boldsymbol{x}_{m+1}) \cdots \psi(\boldsymbol{x}_{m+n}) \right]_{\boldsymbol{x}_{j_k} = \boldsymbol{x}_{i_k}, k=1,\cdots,p}$$

で表す．ここで，$\widehat{d\boldsymbol{x}_{j_k}}$ は $d\boldsymbol{x}_{j_k}$ を除くことを意味し，$[G]_{\boldsymbol{x}_{j_k} = \boldsymbol{x}_{i_k}}$ は，G において，x_{j_k} を x_{i_k} で置き換えることを指示する記号である．たとえば，$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x})$, $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}) \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が緩増加超関数になるような任意の $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x} \, f(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{y}),$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \, g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{y})^* \psi(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{y})$$

$$:= \int_{\mathbb{R}^{4d}} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{w} \, \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}) \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{y})^* \psi(\boldsymbol{w}) \psi(\boldsymbol{z}).$$

これらの準双線形形式についても，

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x} \, f(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x} \, \psi(\boldsymbol{x})^* f(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{x}),$$

---

[18] 付録 D，例 D-6 を参照．

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{y})^*\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, \psi(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{y})^* g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})$$

のように記す場合がある.

ヒルベルト空間 $\mathscr{X}$ における準双線形形式 q と線形作用素 A について, 部分空間 $D \subset Q(q) \cap D(A)$ があって, 任意の $\psi, \phi \in D$ に対して, $q(\psi,\phi) = \langle\psi, A\phi\rangle$ が成り立つとき, D 上で q は A に等しいといい, $q = A$ (D 上) と記す.

命題 8-6

(i) 任意の $f_i, g_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ に対して

$$\psi(f_1)^*\cdots\psi(f_m)^*\psi(g_1)\cdots\psi(g_n)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{d(m+n)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_m d\boldsymbol{y}_1\cdots d\boldsymbol{y}_n\, f_1(\boldsymbol{x}_1)\cdots f_m(\boldsymbol{x}_m) g_1(\boldsymbol{y}_1)^*\cdots g_n(\boldsymbol{y}_n)^*$$
$$\times\, \psi(\boldsymbol{x}_1)^*\cdots\psi(\boldsymbol{x}_m)^*\psi(\boldsymbol{y}_1)\cdots\psi(\boldsymbol{y}_n) \quad (D_{\mathscr{S}}\ 上).$$

(ii) f を $\mathbb{R}^d$ 上の (ルベーグ測度に関して) a.e. 有限な関数で, $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ かつ $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset D(f)$ であるとする. このとき,

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad (D_{\mathscr{S}}\ 上). \tag{8.73}$$

証明 (i) (8.62) を繰り返し使えばよい.

(ii) $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ により, $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x})$ は, $\mathbb{R}^{2d}$ 上の緩増加超関数になる (付録 D, 例 D-6 を参照). 任意の $\Psi, \Phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\right)(\Psi,\Phi)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}_1)\langle\psi(\boldsymbol{x}_1)\Psi, \psi(\boldsymbol{x}_1)\Phi\rangle\, d\boldsymbol{x}_1$$
$$= \sum_{p\geq 0}(p+1)\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}_1\, f(\boldsymbol{x}_1)\int_{\mathbb{R}^{dp}} d\boldsymbol{x}_2\cdots d\boldsymbol{x}_{p+1}\,\Psi^{(p+1)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{p+1})^*$$
$$\times\,\Phi^{(p+1)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{p+1})$$
$$= \sum_{p\geq 0}\int_{\mathbb{R}^{d(p+1)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_{p+1}\left[\sum_{j=1}^{p+1} f(\boldsymbol{x}_j)\right]\Psi^{(p+1)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{p+1})^*$$

$$\times \boldsymbol{\Phi}^{(p+1)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{p+1}).$$

ここで，最後の等号を得るのに，関数 $\Psi^{(p+1)}(\cdot)^*\Phi^{(p+1)}(\cdot)$ の置換対称性を用いた．上式の最後の量は $\langle \Psi, d\Gamma_{\rm b}(f)\Phi\rangle$ に等しい．したがって，(8.73) が成立する．　□

(8.73) の特別な場合として，$f=1$ をとれば，ボソンの個数作用素 $N_{\rm b}$ に対して，

$$N_{\rm b} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad (D_{\mathscr{S}}\ \text{上}) \tag{8.74}$$

という式が得られる．

上の議論で，F の代わりに，偏微分作用素を考えることもできる．ここでは，簡単な場合だけを考えることにする．$P(\boldsymbol{x})$ を $\mathbb{R}^d$ 上の多項式とする．これに対して，偏微分作用素 $P(\partial_{\boldsymbol{x}}) := P(\partial_1, \cdots, \partial_d)$ が定義される．$F \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ とする．補題 8-4 によって，$P(\partial_{\boldsymbol{y}})\langle \psi(\boldsymbol{x})\Psi, \psi(\boldsymbol{y})\Phi\rangle$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ の元であるから，任意の $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して

$$L_F^P(\Psi, \Phi) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) P(\partial_{\boldsymbol{y}}) \langle \psi(\boldsymbol{x})\Psi, \psi(\boldsymbol{y})\Phi\rangle \tag{8.75}$$

は $D_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式を定義する．これを記号的に

$$L_F^P := \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x})^* P(\partial_{\boldsymbol{y}}) \psi(\boldsymbol{y}) \tag{8.76}$$

と記す．特に，$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ の場合 (付録 D，例 D-5 を参照)，

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x})^* P(\partial_{\boldsymbol{y}}) \psi(\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^* P(\partial_{\boldsymbol{x}}) \psi(\boldsymbol{x}) \tag{8.77}$$

と書く．

8-4-2　準双線形形式としてのハミルトニアン

量子 de Broglie 場に関するあるクラスのハミルトニアンは，前項で定義した準双線形形式を用いて，表示されることを示そう．まず，(8.18) によって定義される，自己相互作用がない場合のハミルトニアン $H_{\rm dB}$ について考察する．

命題 8-7　仮定 (DB.1), (DB.2) に加えて，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset D(V)$ かつ $V \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ であるとする．このとき，

$$H_{\rm dB} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\boldsymbol{x})^* \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x}) \right) \psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \quad (D_{\mathscr{S}}\ \text{上}) \tag{8.78}$$

が成立する．

証明　変数 $\boldsymbol{x}$ に関するラプラシアンを $\Delta_{\boldsymbol{x}}$ で表す．任意の $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \langle \psi(\boldsymbol{x})\Psi, \Delta\psi(\boldsymbol{x})\Phi\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}^{d(n+1)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_{n+1}\,(n+1)\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1})^* \\
&\quad \times \Delta_{\boldsymbol{x}_1}\Phi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}) \\
&= \sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}^{d(n+1)}} d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_{n+1}\,\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1})^* \\
&\quad \times \left(\sum_{j=1}^{n+1}\Delta_{\boldsymbol{x}_j}\right)\Phi^{(n+1)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{n+1}) \quad (\because\ \text{置換対称性}) \\
&= \sum_{n\geq 0}\langle \Psi^{(n+1)}, (d\Gamma_{\mathrm{b}}(\Delta)\Phi)^{(n+1)}\rangle \\
&= \langle \Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(\Delta)\Phi\rangle.
\end{aligned}$$

したがって，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(\Delta) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\,\psi(\boldsymbol{x})^*\Delta\psi(\boldsymbol{x}) \quad (D_{\mathscr{S}}\ \text{上}).$$

補題 8-6 (ii) により，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(V) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\,\psi(\boldsymbol{x})^* V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) \quad (D_{\mathscr{S}}\ \text{上}).$$

これらの事実と (8.18) により，(8.78) が成立する．　□

命題 8-7 は，8-1 節の発見法的議論に現われた形式的表示 (8.7) に数学的に厳密な意味をあたえるものである．つまり，(8.7) の右辺の象徴的表示は，作用素の意味ではなく，8-3-1 項で定義した準双線形形式の意味において，理念的実在性を獲得するということである．

8-4-3　自己相互作用を含むハミルトニアン

次に，量子 de Broglie 場の自己相互作用を考える．

U を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の実数値ボレル可測関数でルベーグ測度に関して a.e. 有限であるとする．$n \geq 2$ に対して，関数

$$U^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n) := \sum_{i\neq j}^{n} U(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j), \quad (\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\in\mathbb{R}^{dn}, \tag{8.79}$$

を定義する．このとき，$U^{(n)}$ は $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ 上のかけ算作用素として，自己共役である．

注意 8-5　関数 U は，物理的には，2 つの粒子の間に働く力のポテンシャルを表す．たとえば，3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の中を運動する 2 個の荷電粒子の間には電気力が働くが，そのポテンシャルは，**Coulomb (クーロン) ポテンシャル**

$$U_{\mathrm{el}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{qq'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \quad \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3,$$

であたえられる．ここで，$q,\, q' \in \mathbb{R}$ はそれぞれの荷電粒子の電荷を表す．

補題 8-8　任意の $n \geq 2$ に対して，$L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ は $U^{(n)}$ を簡約する．

証明　S_n を対称化作用素とする．$\Psi \in D(U^{(n)})$ としよう．$U^{(n)}$ は，任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して対称な関数であるから，$S_n U^{(n)}\Psi = U^{(n)} S_n \Psi$ a.e. これは，$S_n\Psi \in D(U^{(n)})$ かつベクトルの等式 $S_n U^{(n)}\Psi = U^{(n)} S_n \Psi$ を意味する．したがって，題意が成立する．□

作用素 $U^{(n)}$ の，$L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ における簡約部分も同じ記号 $U^{(n)}$ で表す．簡約部分の作用の形は $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ 上でのそれと全く同じなので，そうしても混乱のおそれはない．作用素の列 $\{U^{(n)}\}_{n=2}^{\infty}$ から，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ 上の作用素

$$\mathbb{U} := 0 \oplus 0 \oplus \left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} U^{(n)} \right) \tag{8.80}$$

が構成される．定理 3-7 によって，$\mathbb{U}$ は自己共役である．

上の注意 8-5 により，作用素 U は，物理的には，量子 de Broglie 場で記述される素粒子の間のある種の相互作用を表す．したがって，この相互作用をとりいれた全ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{dB}}(U) := H_{\mathrm{dB}} + \mathbb{U} \tag{8.81}$$

によって定義される．この作用素は，各 n 粒子部分空間 $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dn})$ によって簡約され，その簡約部分を $H_{\mathrm{dB}}(U)^{(n)}$ とすれば，

$$H_{\mathrm{dB}}(U)^{(n)} = H_{\mathrm{dB}}^{(n)} + U^{(n)} \tag{8.82}$$

である．これは，非相対論的な n 粒子系の相互作用ハミルトニアンの基本的な形である．

$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数 U で $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ であるものを任意にとる．このとき，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}')U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $\mathbb{R}^{4d}$ 上の緩増加超関数になるから，$D_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式

$$H_I^{(U)} := \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, \psi(\boldsymbol{x})^* \psi(\boldsymbol{y})^* U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \psi(\boldsymbol{x}) \psi(\boldsymbol{y}) \tag{8.83}$$

が定義される．

命題 8-9　すべての $n \geq 2$ に対して，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{dn}) \subset D(U^{(n)})$ を仮定する．このとき，

$$H_I^{(U)} = \mathbb{U} \quad (D_{\mathscr{S}} \text{ 上}). \tag{8.84}$$

証明　任意の $\Psi, \Phi \in D_{\mathscr{S}}$ に対して，

$$\begin{aligned}
H_U(\Psi, \Phi) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, \langle \psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})\Psi, \psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})\Phi \rangle U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) \int_{\mathbb{R}^{d(n+2)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_{n+2}\, U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\
&\qquad \times \Psi^{(n+2)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2})^* \Phi^{(n+2)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2}).
\end{aligned}$$

関数

$$G(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2}) := \Psi^{(n+2)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2})^* \Phi^{(n+2)}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2})$$

の置換対称性により，任意の i, j $(i \neq j,\ i, j = 1, \cdots, n+2)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d(n+2)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_{n+2}\, U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d(n+2)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_{n+2}\, U(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2}).
\end{aligned}$$

これにより，

$$\begin{aligned}
&(n+1)(n+2) \int_{\mathbb{R}^{d(n+2)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_{n+2}\, U(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d(n+2)}} d\boldsymbol{x}_1 \cdots d\boldsymbol{x}_{n+2} \left(\sum_{i \neq j}^{n+2} U(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \right) G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{n+2}) \\
&= \langle \Psi^{(n+2)}, U^{(n+2)} \Phi^{(n+2)} \rangle.
\end{aligned}$$

したがって，

$$H_I^{(U)}(\Psi, \Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi^{(n+2)}, U^{(n+2)} \Phi^{(n+2)} \rangle = \langle \Psi, \mathbb{U}\Phi \rangle.$$

ゆえに (8.84) が成立する．　□

以上から，V, U に対する上述の条件 (命題 8-7，命題 8-9 の仮定) のもとで，点場

$\psi(\boldsymbol{x})$ を用いて，$D_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式の意味で，

$$H_{\mathrm{dB}}(U) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^* \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\boldsymbol{x})\right)\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, \psi(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{y})^* U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y}) \tag{8.85}$$

が成立することが示されたことになる．こうして，物理の教科書や文献に現れる，非相対論的量子場のハミルトニアンの形式的表示に対して数学的に厳密な意味づけがあたえられる．また，本節の結果により，有限自由度の非相対論的量子力学は，de Broglie 場の量子論に包摂されることも厳密に示されたことになる．

8-4-4　応用：超流動のモデル

ある種の液体では，その液体に固有のある温度以下では粘性が 0 になる現象が見られる．これは**超流動現象** (superfluidity) とよばれる．たとえば，液体ヘリウム ^{4}He はそのような液体の 1 つである．この場合には，ある種のボソンの凝縮 (最低エネルギー状態に巨視的なスケールの数のボソンが落ち込む現象 — ボソンは 1 つの 1 粒子状態に何個でも入りうるのでこのようなことが可能) によって超流動が引き起こされているとする説が有力である．これを場の量子論的に考察するための 1 つのモデルが，(8.85) で $V=0$, $U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ (W は $\mathbb{R}^d$ 上の関数) である場合のハミルトニアン

$$H_{\mathrm{sf}} = -\frac{\hbar^2}{2M}\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\, \psi(\boldsymbol{x})^*\Delta\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}\, \psi(\boldsymbol{x})^*\psi(\boldsymbol{y})^* W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y}) \tag{8.86}$$

によってあたえられる (物理的には $d=3$)．このハミルトニアンは，多くの物理学者によって研究されてきているが，そのほとんどは，適当な近似変形や形式的な摂動論を使うものである[19]．数学的に厳密な研究については，たとえば，Araki and Woods (1963), Fröhlich and Park (1978, 1980) を参照．

8-5 節　フェルミオンフォック空間での構成

ボソンフォック空間における de Broglie 場の量子論の構成と全く並行的に，フェルミオンフォック空間においても，de Broglie 場の量子論を構成することができる．この

---

[19] たとえば，高野 (1975) の 4 章，4.6 節，高橋 (1974) の 3 章，3.6 節，Ziman (1969) の p.167, §5.12 などを参照．

場合には，量子化された de Broglie 場は，フェルミオンを記述することになる．

8-5-1 状態のヒルベルト空間

4 章，4-1 節で述べたように，フェルミオンは半整数のスピン s をもつ．この場合，スピン自由度の状態空間は $\mathbb{C}^{2s+1}$ であるので，1 粒子の状態のヒルベルト空間は，$\mathbb{R}^d$ 上の $\mathbb{C}^{2s+1}$ 値 L^2 関数のヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1})$ にとれる[20)]．スピン角運動量成分のとりうる固有値の全体を

$$\mathbb{S} = \{-s, -s+1, \cdots, s-1, s\}$$

とし，$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1})$ の元を

$$\boldsymbol{f} = (f_{-s}, \cdots, f_s) = (f_r)_{r\in\mathbb{S}}$$

のように表す．関数 f_r は，スピン角運動量が r の 1 粒子状態を記述する．

スピン s の量子化された de Broglie 場を $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1})$ 上のフェルミオンフォック空間

$$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_x;\mathbb{C}^{2s+1})) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1}) \tag{8.87}$$

において構成しよう．5 章，例 5-1 と 1 章，1-3 節，例 1-7 および 1 章練習問題 7 によって，

$$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1})) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\mathrm{as}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{n(2s+1)}) \tag{8.88}$$

というふうに同一視される．ここで，$L^2_{\mathrm{as}}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{n(2s+1)})$ は，$\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}}$ 上の $\mathbb{C}^{n(2s+1)}$ 値 L^2 関数

$$\Psi = (\Psi_{i_1\cdots i_n})_{i_1,\cdots,i_n\in\mathbb{S}}$$

で，任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\Psi_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}}(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\Psi_{i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \quad \text{a.e.} \tag{8.89}$$

が成立するものの全体からつくられるヒルベルト空間である．

8-5-2 消滅作用素と生成作用素

フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1}))$ 上の消滅作用素を $c(\boldsymbol{f})$ ($\boldsymbol{f} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1})$) で表す．5 章の結果によって，$c(\boldsymbol{f})$ は有界線形作用素であり，

---

20) この型のヒルベルト空間については，1 章，1-3 節を参照．

$$\|c(\boldsymbol{f})\| = \|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{\sum_{r=-s}^{s} \|f_r\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \tag{8.90}$$

である．各 $r \in \mathbb{S}$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}; \mathbb{C}^{2s+1}))$ 上の作用素 $c_r(f)$ を

$$c_r(f) = c(0, \cdots, 0, \overset{r}{\smile}{f}, 0, \cdots, 0) \tag{8.91a}$$

によって定義する．このとき，任意の $\boldsymbol{f} = (f_r)_{r\in\mathbb{S}} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}; \mathbb{C}^{2s+1})$ に対して，

$$c(\boldsymbol{f}) = \sum_{r\in\mathbb{S}} c_r(f_r). \tag{8.91b}$$

定理 5-2 によって，すべての $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ と $r, r' \in \mathbb{S}$ に対して，

$$\{c_r(f), c_{r'}(g)^*\} = \delta_{rr'}\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}, \tag{8.92a}$$

$$\{c_r(f), c_{r'}(g)\} = 0, \quad \{c_r(f)^*, c_{r'}(g)^*\} = 0, \tag{8.92b}$$

が成立する．

7 章の例 7-3 と同様にして，対応：$f \longrightarrow c_r(f)$ は，作用素値超関数であることがわかる (定義域は $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_x; \mathbb{C}^{2s+1}))$ 全体)．同一視 (8.88) のもとで，$c_r(f)$, $c_r(f)^*$ は次の形をとる ($f \in L^2(\mathbb{R}^d)$)：任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_x; \mathbb{C}^{2s+1}))$ に対して，

$$(c_r(f)\Psi)^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \sqrt{n+1}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})^* \Psi^{(n+1)}_{ri_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\, d\boldsymbol{x}, \tag{8.93a}$$

$$\begin{aligned}&(c_r(f)^*\Phi)^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\delta_{ri_j} f(\boldsymbol{x}_j)\Phi^{(n-1)}_{i_1\cdots\widehat{i_j}\cdots i_n}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \widehat{\boldsymbol{x}_j}, \cdots, \boldsymbol{x}_n), \quad n \geq 1.\end{aligned} \tag{8.93b}$$

8-5-3 量子 de Broglie 場

8-2 節の場合と同様に，ポテンシャル V と相互作用する，時刻 $t \in \mathbb{R}$ の**量子 de Broglie 場**を

$$\psi_r(t, f) := c_r(e^{it\overline{h}_V/\hbar} f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}),\ r \in \mathbb{S}, \tag{8.94}$$

によって定義する．定理 8-1 と同様にして，次の事実が証明される．

定理 8-10 任意の $f \in D(\overline{h}_V)$, $r \in \mathbb{S}$ および $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}; \mathbb{C}^{2s+1}))$ に対して，

$\psi_r(t,f)\Psi$ は t について強微分可能であり,

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_r(t,f)\Psi = \psi_r(t,\overline{h}_V f)\Psi \tag{8.95}$$

が成り立つ.

1 粒子ハミルトニアン h_V の, $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1}))$ における第 2 量子化

$$H'_{\mathrm{dB}} := d\Gamma_{\mathrm{f}}(h_V) \tag{8.96}$$

を用いると,

$$\psi_r(t,f) = e^{itH'_{\mathrm{dB}}/\hbar}\psi(f)e^{-itH'_{\mathrm{dB}}/\hbar}, \quad f\in L(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}),\ r\in\mathbb{S}, \tag{8.97}$$

と表される (定理 5-10 の応用). したがって, H'_{dB} を今の場合のハミルトニアンと解釈することができる.

8-5-4 消滅作用素の作用素値超関数核

$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1}))$ の部分空間

$$D^{(s)}_{\mathscr{S}} := \{\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{f},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^{2s+1}))\,|\,\Psi^{(n)} \in \overset{2s+1}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{x}}),\ n\geq 1\} \tag{8.98}$$

は稠密である. 各 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $r=-s,\cdots,s$ に対して, $D^{(s)}_{\mathscr{S}}$ を定義域とする作用素 $c_r(\boldsymbol{x})$ を

$$(c_r(\boldsymbol{x})\Psi)^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n) := \sqrt{n+1}\,\Psi^{(n+1)}_{ri_1\cdots i_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n),$$
$$\Psi\in D^{(s)}_{\mathscr{S}}, \quad n\geq 0, \tag{8.99}$$

によって定義する. このとき, (8.63) の場合と同様にして, $D^{(s)}_{\mathscr{S}}$ 上で

$$\text{s-}\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})^* c_r(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = c_r(f), \quad f\in C(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d),\ r=-s,\cdots,s, \tag{8.100}$$

を証明することができる. つまり, 定義域を $D^{(s)}_{\mathscr{S}}$ に制限した作用素値超関数 $c_r(f)$ の核は, 作用素 $c_r(\boldsymbol{x})$ によってあたえられる.

作用素 $c_r(\boldsymbol{x})$ に対しても, 8-4 節の議論を全く並行的に展開することができる. だが, 詳細を埋めることは読者に任せる.

8-5-5 応用 : 超伝導のモデル

ある種の金属 (たとえば, 鉛, ニオブ) や合金では, その物質固有のある温度以下で急

に電気抵抗が 0 になる現象が見られる．この現象は**超伝導** (superconductivity) とよばれる．1957 年に Bardeen, Cooper, Schriefer は，場の量子論的方法によって，超伝導現象の特徴を説明する理論を提出し，この分野における飛躍的な発展の契機をつくった．爾来，彼らの理論は **BCS 理論**とよばれている[21)]．

電気伝導は金属内の電子によって引き起こされる．金属内の電子は非相対論的であると仮定されるので，超伝導を理論的に解明しようとする場合，場の量子論的には，電子に対する量子 de Broglie 場の相互作用を考察するのは自然である．上の議論で，$d=3$ (空間 3 次元)，$s=1/2$ (スピン 1/2) の場合を考える．金属内における，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$) の自由電子のエネルギーが実数値連続関数 $h(\boldsymbol{k})$ で表されるとする (たとえば，$h(\boldsymbol{k})=\hbar^2\boldsymbol{k}^2/(2m_{\mathrm{e}})$ ($m_{\mathrm{e}}>0$ は電子の質量))．このとき，作用素解析により，$\hat{h}:=h(-iD_1,-iD_2,-iD_3)$ は $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上の自己共役作用素である．金属内において，位置 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ にある電子の間に働く力のポテンシャルは，$\mathbb{R}^6$ 上の実数値関数 $W:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\longrightarrow W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ で記述されるものとし，$W^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n):=\sum_{i\neq j}^{n}W(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j)$ とおく．さらに，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^{3n})\subset D(W^{(n)})$ ($W\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^6)$) を仮定する．このとき，(8.85) の場合と同様にして，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^2))$ の稠密な部分空間 $\mathscr{D}^{(1/2)}_{\mathscr{S}}$ 上で次の作用素が定義される：

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{sc}}&:=d\Gamma_{\mathrm{f}}(\hat{h}-\mu)\\&\quad+\sum_{r,r'=\pm1/2}\int_{\mathbb{R}^6}c_r(\boldsymbol{x})^*c_{r'}(\boldsymbol{y})^*W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})c_{r'}(\boldsymbol{y})c_r(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}.\end{aligned}\tag{8.101}$$

ここで，μ は実定数である．

$h(\boldsymbol{k})=\hbar^2\boldsymbol{k}^2/(2m_{\mathrm{e}})$ とし，形式的に $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=g\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ ($g<0$ は定数) の場合を考え，ある種の "近似" を行うと H_{sc} を出発点として，BCS 理論が再現される[22)]．

しかし，数学的な観点から言えば，この物理的な議論にはさまざまな問題がある．まず，第 1 に，$W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=g\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ の場合，H_{sc} は $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}};\mathbb{C}^2))$ 上の作用素として意味をもたない (注意 8-3 と同様の注意が今の場合もあてはまる)．そこで，数学的には，上に述べた条件をみたす W から出発して，H_{sc} の性質 (自己共役性，スペクトル等) を調べ，$W(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\longrightarrow g\delta(\boldsymbol{x}-y)$ の極限でもって別の量子場の理論を構築する必要がある．そして，BCS 理論で使われる近似に数学的に厳密な意味づけをあたえなければならない．だが，この方向の研究は，数学的な意味において満足すべき域にはま

21) この理論により，Bardeen, Cooper, Schriefer は 1972 年度のノーベル物理学賞を受けた．

22) 物理的な議論については，高野 (1975) の 8 章，8-3 節や高橋 (1976) の 12 章，12-3 節を参照．

だ達していないように見える．

ノート

8-4 節で示したように，de Broglie 場の量子論は，通常の粒子的描像に基づく多体系の非相対論的量子力学 — 有限自由度のシュレーディンガー作用素をハミルトニアンとする量子力学 — を特別な場合として含むものである．これによって，非相対論的な量子系に対して，量子場という理念によって，素粒子の波動性と粒子性の概念が有機的に融合され，一元的な統一が達成されたことになる．

De Broglie 場の量子化に関して優れた物理的な論述が朝永 (1997b) の 10 章にある．

8-5 節, 8-5-5 項で言及した BCS モデルについては，物理的にも数学的にも数多くの研究がある．最近の研究として，たとえば，Bursill and Thompson (1993), Gerisch and Rieckers (1997) をあげておく．

8 章演習問題

1. $\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})$ $(t\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d)$ を方程式 (8.1) をみたす de Broglie 場とし，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，$\Psi_{\rm cl}(t,\cdot)\in D(\Delta)\cap D(V)$ とする (Δ, V は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素として考える)．また，a.e.$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ に対して，$\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})$ は t について微分可能であるとする．

(i)

$$N_{\rm cl}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^*\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

とおく．任意の $a,\ b>0$ $(a<b)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\in(a,b)} |\partial_t\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})|\,|\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} < \infty$$

が成り立つとする．このとき，$dN_{\rm cl}(t)/dt = 0$ $(t\in\mathbb{R})$ を示せ．

(ii) $j,\ k=1,\cdots,d$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 $\hat{l}_{jk}$ を

$$\hat{l}_{jk} := -i\hbar(x_jD_k - x_kD_j)$$

によって定義する[23]．各 $t\in\mathbb{R}$ に対して $\partial_t\Psi_{\rm cl}(t,\cdot)\in D(D_j)$, $D_j\Psi_{\rm cl}(t,\cdot)\in D(x_k)$ $(j,\ k=1,\cdots,d)$，かつ $\partial_tD_j\Psi_{\rm cl}(t,\cdot) = D_j\partial_t\Psi_{\rm cl}(t,\cdot)$ であるとし，

$$L_{jk}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^*\hat{l}_{jk}\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

[23] これは，d 次元空間に存在する，粒子的描像における 1 個の量子的粒子の**軌道角運動量作用素**の成分である．

を定義する．さらに，$V(\boldsymbol{x})$ は $|\boldsymbol{x}|$ のみによる微分可能な関数で $L_{jk}\Psi_{\rm cl}(t,\cdot) \in D(V)$, $V\Psi_{\rm cl}(t,\cdot) \in D(L_{jk})$ $(j,\ k=1,\cdots,d)$ をみたし，任意の $a,\ b>0$ $(a<b)$, $j=1,\cdots,d$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\in(a,b)} |\boldsymbol{x}|\,|\partial_t\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})|\,|D_j\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\in(a,b)} |\boldsymbol{x}|\,|\partial_t D_j\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})|\,|\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x} < \infty,$$

が成り立つとする．このとき，$j,\ k=1,\cdots,d$ に対して，$dL_{jk}(t)/dt=0$ $(t\in\mathbb{R})$ を示せ．

ヒント　(i), (ii) の仮定はそれぞれ，$N_{\rm cl}(t)$, $L_{jk}(t)$ を定義する空間積分と時間微分が交換できる十分条件である．時間微分を空間積分と交換したあとは，方程式 (8.1) を使って変形すればよい．(ii) の V に対する条件は，適当な定義域上で $[L_{jk},V]=0$ となるためのものである．また，$[\Delta,\hat{l}_{jk}]=0$ にも注意．

注意　$\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^*\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})$ は古典的物質場としての de Broglie 場の**物質密度関数**を表すと解釈される．したがって，$N_{\rm cl}(t)$ は場の**総物質量**を表す．(i) はこれが適当な条件のもとで時間的に保存されることを示す．

他方，$\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})^*\hat{l}_{jk}\Psi_{\rm cl}(t,\boldsymbol{x})$ は場の**軌道角運動量密度**の成分を表す．したがって，$L_{jk}(t)$ は場の**全軌道角運動量**の成分を表す．問 (ii) は，これも保存量であることを示す．

2. $d\geq 2$ とし，$\{T(R)\}_{R\in{\rm SO}(d)}$ を 7 章の演習問題 8 で導入した，d 次元回転群 SO(d) の，$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上でのユニタリ表現とする．各 $R\in{\rm SO}(d)$ に対して，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ 上の作用素 $U(R)$ を

$$U(R) := \Gamma(T(R))$$

によって定義する．

(i)　$\{U(R)\,|\,R\in{\rm SO}(d)\}$ はユニタリ表現であることを示せ．

(ii)　$j\neq k$ $(j,\ k=1,\cdots,d)$ として，x_j-x_k 平面の原点に関する角度 $\theta\in\mathbb{R}$ の回転を $R^{(d)}_{jk}(\theta)$ で表す[24]．このとき，

$$U(R^{(d)}_{jk}(\theta)) = e^{-id\Gamma_{\rm b}(\hat{l}_{jk})\theta/\hbar}$$

が成り立つことを示せ．ここで，$d\Gamma_{\rm b}(\hat{l}_{jk})$ は 1 粒子の軌道角運動量作用素 $\hat{l}_{jk}$ の第 2 量子化作用素である．

注意　問 (ii) は量子 de Broglie 場の軌道角運動量の (j,k) 成分が $d\Gamma_{\rm b}(\hat{l}_{jk})$ であることを意味する．

3. 自由な量子 de Broglie 場 $\psi_{\rm free}(t,f)$ $(f\in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ の真空期待値

$$\langle \Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}, \psi_{\rm free}(t_1,f_1)\cdots\psi_{\rm free}(t_m,f_m)\psi_{\rm free}(s_1,g_1)^*\cdots\psi_{\rm free}(s_n,g_n)^*\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}\rangle$$

---

[24] 7 章，(7.25) 式のあとに定義される $R_{jk}(\theta)$ の定義域をを $\mathbb{R}^d$ に制限したもの．

を計算せよ．ただし，$m, n \in \mathbb{N}$, t_j, $s_k \in \mathbb{R}$, f_j, $g_k \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ $(j = 1, \cdots, m,\ k = 1, \cdots, n)$.
さらに，任意の f, $g \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して，

$$\lim_{|t-s|\to\infty} \langle \Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})}, \psi_{\mathrm{free}}(t, f)\psi_{\mathrm{free}}(s, g)^* \Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})} \rangle = 0$$

を示せ．

第 9 章

自由な Klein-Gordon 場の量子論

自由な Klein-Gordon 方程式にしたがう場の量子論を $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ 上のボソンフォック空間において構成する.

9-1 節　基本的アイディア

自由な Klein-Gordon (KG) 方程式

$$(\Box + m^2)\phi_{\rm cl}(x) = 0 \tag{9.1}$$

(序章の (0.23) を参照) にしたがう古典場 $\phi_{\rm cl}$, すなわち, 自由な Klein-Gordon 場の量子版を構成することを考える. この場合, $\phi_{\rm cl}$ が実数値である場合と複素数値である場合に応じて, 2 種類の量子場が構成される. ここでは, まず, 実数値の古典場に対応する量子場を構成する. 要点は, 序章の発見法的議論において得られた形式的表示 (0.50) に数学的に厳密な意味づけをあたえることである. 本書をここまで読んできた読者には, これはもうそんなに難しい仕事ではないはずである. 実際, 次のように進めばよい. $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ 上のボソンフォック空間

$$\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\rm s}^{n} L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\rm sym}(\mathbb{R}^{dn}_{\boldsymbol{k}}) \tag{9.2}$$

(運動量表示のボソンフォック空間) を考え, このボソンフォック空間における消滅作用素を $a(f)$ ($f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$), その作用素値超関数核を $a(\boldsymbol{k})$ とする. このとき, 形式的表示 (0.50) における象徴的作用素 $\hat{a}(\boldsymbol{k})$ を $a(\boldsymbol{k})$ に読み換えることにより, 量子場を構成する. これが以下の叙述の基本的アイディアである.

9-2 節　量子場の定義と基本的性質

9-2-1　準双線形形式としての量子場

座標表示のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ において稠密な部分空間 $D_{\mathscr{S}}$ ((8.58) 式) に対応する，運動量表示のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ における稠密な部分空間を $\hat{D}_{\mathscr{S}}$ と記す．数学的にきちんと書けば，

$$\hat{D}_{\mathscr{S}} := \Gamma(\mathscr{F}_d)D_{\mathscr{S}} \tag{9.3}$$

である．各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\hat{D}_{\mathscr{S}}$ を定義域とする線形作用素 $a(\boldsymbol{k})$ を次式で定義する：

$$(a(\boldsymbol{k})\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n) := \sqrt{n+1}\Psi^{(n+1)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_1, \cdots, k_m),$$
$$\text{a.e.}(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n), \ \Psi \in \hat{D}_{\mathscr{S}}. \tag{9.4}$$

この作用素は 8 章，8-3 節で導入された作用素 $\psi(\boldsymbol{x})$ の "フーリエ変換" である．すなわち，すべての $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$a(\boldsymbol{k})\Psi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \Gamma(\mathscr{F}_d)\psi(\boldsymbol{x})\Gamma(\mathscr{F}_d)^{-1}\Psi \, d\boldsymbol{x}, \quad \Psi \in \hat{D}_{\mathscr{S}}, \tag{9.5}$$

が成り立つ (問題 1)．

ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上の消滅作用素を $a(f)$ ($f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$) とする．8 章の作用素超関数 $\psi(f)$ の場合と同様にして，任意の $\Psi \in \hat{D}_{\mathscr{S}}$ と $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ に対して，

$$a(f)\Psi = \int_{\mathbb{R}^d} a(\boldsymbol{k})f(\boldsymbol{k})^*\Psi \, d\boldsymbol{k} \tag{9.6}$$

を示すことができる．ただし，右辺は強積分である (付録 E を参照)．

$\omega(\boldsymbol{k})$ を (0.31) によって定義される，$\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}$ 上の関数としよう．$m = 0$ の場合は，$d \geq 2$ の場合のみを考える[1)]．任意の $x = (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^\nu$ に対して，$\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}$ 上の関数 $g^{\pm}_x$ を

$$g^{\pm}_x(\boldsymbol{k}) := \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}} e^{\pm i\omega(\boldsymbol{k})t \mp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{9.7}$$

によって定義する ($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{x}$ のユークリッド内積を表す)．$m > 0$ ならば，

---

1) $m = 0$ で $d = 1$ の場合，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^1_{\boldsymbol{k}})$ に対して，$f/\sqrt{\omega} = f/\sqrt{|\boldsymbol{k}|}$ は $L^2(\mathbb{R}^1_{\boldsymbol{k}})$ の元であるとは限らない．すると，後に見るように，均された量子場が作用素値超関数として定義されないのである．これは，質量 0 の素粒子に対する量子場の理論に特有の困難 — **赤外発散** (infrared divergence) とよばれる — の 1 つの現れである．

$$|g_x^{\pm}(\boldsymbol{k})| \le \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d m}}$$

であるから，$g_x^{\pm}$ は有界である．したがって，$g_x^{\pm} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ (付録 D の例 D-1 を参照)．$m = 0$ の場合は，χ_1 を $\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d | |\boldsymbol{k}| \le 1\}$ の定義関数とすれば，

$$|g_x^{\pm}(\boldsymbol{k})| \le \frac{\sqrt{\hbar}\chi_1(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2(2\pi)^d|\boldsymbol{k}|}} + \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d}}.$$

右辺第 1 項は $L^1(\mathbb{R}^d)$ の元であり，第 2 項は有界であるから，$g_x^{\pm} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ である (付録 D の例 D-1，例 D-2 を参照)．したがって，いずれの場合でも，$g_x^{\pm} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$. ゆえに，8-4 節の理論によって，$\hat{D}_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式

$$\phi^{\text{free}}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k} \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d \omega(\boldsymbol{k})}} \left(a(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{9.8}$$

が定義される．

古典論と量子論の対応を見るために，

$$E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}) := \hbar\omega(\boldsymbol{k}), \quad m_0 := \hbar m, \tag{9.9}$$

とおけば，$E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}) = \sqrt{(\hbar\boldsymbol{k})^2 + m_0^2}$ であるから，$E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k})$ は質量 m_0，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の自由な相対論的粒子のエネルギーを表す．

そこで，準双線形形式 $\phi^{\text{free}}(x)$ を質量 m_0 の，**点様 (point-like) の自由な量子 Klein-Gordon 場**または**点様の自由な量子スカラー場**という．なお，$\hbar = 1$ の単位系では，$m = m_0$ となるので，m も自由な量子 Klein-Gordon 場の質量とよぶことがある．

注意 9-1　$\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ を任意に固定して，$g_x^{\pm}(\boldsymbol{k})$ を x の関数と見ると，これは，容易にわかるように，自由な KG 方程式の解である：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + m^2\right) g_x^{\pm}(\boldsymbol{k}) = 0.$$

x の関数 $g_x^{\pm}(\boldsymbol{k})$ を**自由な KG 方程式の平面波解**という．

9-2-2　作用素値超関数としての量子場

準双線形形式 $\phi^{\text{free}}(x)$ を試料関数 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^{\nu})$ で均したものが作用素値超関数を定義することを見よう．実際，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^{\nu})$ と $\Psi, \Phi \in \hat{D}_{\mathscr{S}}$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\langle\Psi, \phi^{\mathrm{free}}(x)\Phi\rangle\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^\nu} dx\, f(x) \int_{\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}} d\boldsymbol{k}\, \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega(\boldsymbol{k})}}$$
$$\times \left(\langle a(\boldsymbol{k})\Psi, \Phi\rangle e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \langle\Psi, a(\boldsymbol{k})\Phi\rangle e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right)$$

であるが,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} dx\, |f(x)| \int_{\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}} d\boldsymbol{k}\, \frac{|\langle a(\boldsymbol{k})\Psi, \Phi\rangle|}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} < \infty,$$

であるので，フビニの定理の応用により，積分の順序交換ができて,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\langle\Psi, \phi^{\mathrm{free}}(x)\Phi\rangle\, dx$$
$$= \sqrt{\hbar\pi} \int_{\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}} d\boldsymbol{k} \left\{ \frac{(Ff)(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} \langle a(\boldsymbol{k})\Psi, \Phi\rangle + \frac{(Ff^*)(\boldsymbol{k})^*}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} \langle\Psi, a(\boldsymbol{k})\Phi\rangle \right\} \tag{9.10}$$

を得る．ただし,

$$(Ff)(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^\nu}} \int_{\mathbb{R}^\nu} e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f(t, \boldsymbol{x})\, dt\, d\boldsymbol{x}. \tag{9.11a}$$

この表示からわかるように,

$$(Ff)(\boldsymbol{k}) = \hat{f}(-\omega(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{9.11b}$$

であるから ($\hat{f}$ は f のフーリエ変換)，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$|\boldsymbol{k}|^n |(Ff)(\boldsymbol{k})| \longrightarrow 0, \quad |\boldsymbol{k}| \longrightarrow \infty \tag{9.12}$$

が成り立つ．したがって，特に，$Ff/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$．ゆえに,

$$\phi^{\mathrm{free}}(f) := \sqrt{\hbar\pi} \left\{ a\left(\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right)^* + a\left(\frac{Ff^*}{\sqrt{\omega}}\right) \right\} \tag{9.13}$$

を定義することができる．(9.6) と (9.10) により,

$$\langle\Psi, \phi^{\mathrm{free}}(f)\Phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\langle\Psi, \phi^{\mathrm{free}}(x)\Phi\rangle\, dx \tag{9.14}$$

が成立する．

生成・消滅作用素の定義域の性質によって,

$$D(\phi^{\mathrm{free}}(f)) \cap D(\phi^{\mathrm{free}}(f)^*) \supset D(N_{\mathrm{b}}^{1/2}) \tag{9.15}$$

であることがわかる．

命題 4-25 によって，任意の $\Psi \in D(N_{\rm b}^{1/2})$ に対して

$$\|\phi^{\rm free}(f)\Psi\| \le \sqrt{\hbar\pi}\left\|\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}\left(\|N_{\rm b}^{1/2}\Psi\| + \|(N_{\rm b}+1)^{1/2}\Psi\|\right). \tag{9.16}$$

$n > d/4$ とすれば，

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\,\frac{1}{\omega(\boldsymbol{k})(1+\omega(\boldsymbol{k})^2+|\boldsymbol{k}|^2)^{2n}}\,(1+\omega(\boldsymbol{k})^2+|\boldsymbol{k}|^2)^{2n}|\hat{f}(-\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})|^2\\ &\le M_n(f)^2\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\frac{1}{\omega(\boldsymbol{k})(1+|\boldsymbol{k}|^2)^{2n}} < \infty.\end{aligned}$$

ただし，

$$M_n(f) := \sup_{k\in\mathbb{R}^\nu}(1+|k|^2)^n|\hat{f}(k)| < \infty.$$

$L^2(\mathbb{R}^\nu_x)$ から $L^2(\mathbb{R}^\nu_k)$ へのフーリエ変換 $\mathscr{F}_\nu$ を用いると

$$M_n(f) = \sup_{k\in\mathbb{R}^\nu}|\,\mathscr{F}_\nu[(1-\Delta)^n f]\,|$$

と書ける．微分演算とフーリエ変換は，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ の位相で連続であるから，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ から $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ への写像：$f \longrightarrow Ff/\sqrt{\omega}$ は連続である．よって，写像：$f \longrightarrow \phi^{\rm free}(f)$ は $(\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}), D(N_{\rm b}^{1/2}))$ で働く作用素値超関数であることがわかる．

任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ に対して，

$$(\mathscr{F}_\nu(\Box+m^2)f)(k) = (k_0^2-\boldsymbol{k}^2+m^2)\hat{f}(k), \quad k=(k_0,\boldsymbol{k})\in\mathbb{R}^\nu_k,$$

と (9.11b) により，

$$F(\Box+m^2)f = 0. \tag{9.17}$$

したがって，(9.13) によって，任意の $\Psi \in D(N_{\rm b}^{1/2})$ と $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ に対して，

$$\phi^{\rm free}\left(\Box f + \left(\frac{m_0}{\hbar}\right)^2 f\right)\Psi = 0 \tag{9.18}$$

が成立することがわかる．これは，$\phi^{\rm free}$ が作用素値超関数の意味で，$D(N_{\rm b}^{1/2})$ 上で，自由な KG 方程式

$$\left(\Box + \left(\frac{m_0}{\hbar}\right)^2\right)\phi^{\rm free}(x) = 0 \tag{9.19}$$

をみたすということである．こうして，自由な KG 方程式をみたす作用素値超関数が構成される．作用素値超関数 ϕ^{free} を質量 m_0 の**自由な量子 Klein-Gordon 場**または**自由な量子スカラー場**という．

任意の $g \in L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ に対して，$a(g)^\sharp$ は有限粒子部分空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d))$ を不変にするので，すべての $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^\nu)$ に対して，

$$\phi^{\mathrm{free}}(f)\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)), \tag{9.20a}$$

$$\phi^{\mathrm{free}}(f)^*\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)) \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)), \tag{9.20b}$$

が成立する．

作用素値線形汎関数 $f \longrightarrow \phi^{\mathrm{free}}(f)$ としての自由な量子スカラー場 ϕ^{free} の定義域 (f の属する集合) は $\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^\nu)$ よりももっと広い集合に拡大できることを注意しておく．実際，集合 $W_{-1/2}(\mathbb{R}_x^\nu)$ を

$$W_{-1/2}(\mathbb{R}_x^\nu) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_x^\nu) \;\middle|\; \frac{Ff}{\sqrt{\omega}} \in L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d) \right\}$$

として導入すれば，任意の $f \in W_{-1/2}(\mathbb{R}_x^\nu)$ に対して，$\phi^{\mathrm{free}}(f)$ を (9.13) の右辺によって定義することができる．以後，ϕ^{free} はこの拡大された意味で考える．

9-2-3　不変部分空間と本質的自己共役性

量子場 ϕ^{free} が Gårding-Wightman の公理系の (GW.1)(7 章を参照) をみたすことを証明しよう．

記号を簡略にするために，フォック真空 $\Omega_{L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)}$ を単に Ω_0 と記す：

$$\Omega_0 := \Omega_{L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)}. \tag{9.21}$$

容易にわかるように，これは，$\phi^{\mathrm{free}}(\cdot)$ の任意の積の定義域に入るので，部分空間

$$\mathscr{D}_{\mathrm{free}} := \mathscr{L}\{\Omega_0, \phi^{\mathrm{free}}(f_1)\cdots\phi^{\mathrm{free}}(f_n)\Omega_0 \,|\, n \geq 1,\ f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), j = 1, \cdots, n\} \tag{9.22}$$

が定義される．明らかに，任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，$\phi^{\mathrm{free}}(f)$ は $\mathscr{D}_{\mathrm{free}}$ を不変にする．次の事実が成立する．

命題 9-1　部分空間 $\mathscr{D}_{\mathrm{free}}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d))$ で稠密である．

これを証明するために，ある補題をまず証明する．

M を $\mathbb{R}^d$ の開集合とするとき，M 上の無限回微分可能な関数 u でその台 supp u

が M の中の有界な集合となるものの全体を $C_0^\infty(M)$ で表す.

集合 $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ (上の定義で $M = \mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ の場合) は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ で稠密である. 実際, 自然数 n に対して, $\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d$ 上の無限回微分可能な関数 ϕ_n で, $\operatorname{supp}\phi_n \subset \mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $|\phi_n(\boldsymbol{k})| \le 1$, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(\boldsymbol{k}) = 1$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ をみたすものを選び, 任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ に対して, $u_n = \phi_n u$ とおけば, ルベーグの優収束定理を応用することにより, $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)} = 0$ がわかる. $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ であるから, いまの結果は, $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ が $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ において $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ の位相で稠密であることを意味する. $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ で稠密であるから (新井 (1997a) の定理 1.28), $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{\mathbf{0}\})$ は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ で稠密であることが結論される.

補題 9-2　集合

$$D_1 := \mathscr{L}\left\{ \frac{v(\omega)u}{\sqrt{\omega}} \;\middle|\; v \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\}) \right\}$$

$(v(\omega) : \mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ は ω と v の合成関数) は, $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ の稠密な部分空間である.

証明　$g \in D_1^\perp$ とする. したがって, 任意の $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(\boldsymbol{k})^* v(\omega(\boldsymbol{k}))}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} u(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} = 0.$$

$m > 0$ ならば, $v(\omega(\cdot))/\sqrt{\omega}$ は有界な関数なので, $g^* v(\omega(\cdot))/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$. $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\})$ は任意であり, $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\})$ は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ で稠密であるから, $g^* v(\omega(\cdot)) /\sqrt{\omega} = 0$, すなわち, $g^* v(\omega(\cdot)) = 0$ が得られる. v として, 閉区間 $[m, \sqrt{R^2 + m^2}]$ 上では 1 の関数をとれば, $|\boldsymbol{k}| \le R$ ならば, $g(\boldsymbol{k}) = 0$ a.e. が得られる. R は任意であったから, $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ の元として $g = 0$ が結論される.

$m = 0$ の場合は, 任意の $a > 0, b > 0$ $(a < b)$ に対して,

$$\int_{a \le |\boldsymbol{k}| \le b} \frac{|g^*(\boldsymbol{k}) v(\omega(\boldsymbol{k}))|}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}\, d\boldsymbol{k} < \infty$$

であるから, $g^* v(\omega(\cdot))/\sqrt{\omega} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\})$ である[2). したがって, u として, $C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\})$ の任意の元をとれば, du Bois-Raymond の補題[3)] により, $g^* v(\omega(\cdot)) = 0$ (a.e.) が結論される. これから, $m > 0$ のときと同様にして, $g = 0$ が得られる.

以上から, $D_1^\perp = \{0\}$. ゆえに, D_1 は稠密である.　□

[2)] $M \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とするとき, M 上のボレル可測関数 f が, M の任意のコンパクト集合上でルベーグ積分可能であるとき, f は M 上で局所可積分可能であるといい, このような関数 f の全体を $L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ と表す.

[3)] たとえば, 黒田 (1980) の定理 6.5.

命題 9-1 の証明　Δ を $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ 上の一般化された d 次元ラプラシアンとすれば，作用素

$$h_m := -\Delta + m^2$$

は非負の自己共役作用素で単射であり，$h_m \geq m^2$ が成り立つ．任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ に対して，部分積分により

$$F\partial_t f = -i\omega F f.$$

一方，$\mathscr{F}_d : L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ を d 次元のフーリエ変換とすれば，

$$\mathscr{F}_d h_m \mathscr{F}_d^{-1} = \omega^2$$

が成り立つ．したがって，特に，

$$\mathscr{F}_d h_m^{1/2} \mathscr{F}_d^{-1} = \omega.$$

これから，$\omega F f = F h_m^{1/2} f$ と変形できるので (h_m は $I \otimes h_m$ として，$L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) = L^2(\mathbb{R}^\nu_x)$ 上の作用素に拡張される．この拡張も同じ記号 h_m で表す)

$$F\partial_t f = -iF h_m^{1/2} f$$

が成り立つ．ゆえに，(9.13) より，

$$\phi^{\mathrm{free}}(\partial_t f) = -i\sqrt{\hbar\pi}\left\{a\left(\frac{F h_m^{1/2} f}{\sqrt{\omega}}\right)^* - a\left(\frac{F h_m^{1/2} f^*}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}.$$

そこで，$h_m^{1/2} f$ をあらためて f とすれば，

$$\phi^{\mathrm{free}}(\partial_t h_m^{-1/2} f) = -i\sqrt{\hbar\pi}\left\{a\left(\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right)^* - a\left(\frac{Ff^*}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}$$

を得る．これと (9.13) により，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ 上で

$$a\left(\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right)^* = \frac{1}{2\sqrt{\hbar\pi}}\{\phi^{\mathrm{free}}(f) + i\phi^{\mathrm{free}}(\partial_t h_m^{-1/2} f)\} \tag{9.23a}$$

が得られる (これは $m = 0$ の場合でも成り立つ).

さて，任意の $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}} \setminus \{0\})$ に対して，$f = \hat{v} \times \check{u}$ とおけば

$$Ff = v(\omega)u. \tag{$*$}$$

明らかに $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ である．さらに，$g := \partial_t h_m^{-1/2} f$ は $m > 0$ または $m = 0$ のいずれの場合でも，$\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ の元である．実際

$$\hat{g}(\boldsymbol{k}) = ik_0(\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{-1/2}\hat{f}(\boldsymbol{k}) = ik_0 v(-k_0)(\boldsymbol{k}^2 + m^2)^{-1/2}v(\boldsymbol{k})$$

$(k = (k_0, \boldsymbol{k}) \in \mathbb{R}_x^\nu)$ であるので，$m > 0$ ならば，$\hat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_k^\nu)$ は容易にわかる．したがって，$g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^\nu)$．また，$m = 0$ のときは，$\hat{g}(k) = ik_0 v(-k_0)|\boldsymbol{k}|^{-1}v(\boldsymbol{k})$ であるが，$\boldsymbol{k} = 0$ の近傍で $u(\boldsymbol{k}) = 0$ であるので，$\hat{g}$ は $\mathbb{R}_k^\nu$ 上で無限回微分可能である．$\hat{g}$ が無限遠で急減少であることを見るのは容易である．よって，$\hat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_k^\nu)$．これらの事実と $(*)$, (9.23a) により，

$$\mathscr{L}\left\{\Omega_0, a(g_1)^* \cdots a(g_n)^*\Omega_0 \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, g_j \in D_1,\, j = 1, \cdots, n\right\} \subset \mathscr{D}_{\rm free}.$$

左辺の集合は $\mathscr{F}_{\rm b,fin}(D_1)$ である ((4.19) を参照)．補題 9-2 によって，D_1 は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ で稠密であるから，$\mathscr{F}_{\rm b,fin}(D_1)$ は $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d))$ で稠密である．よって，$\mathscr{D}_{\rm free}$ は，$\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d))$ で稠密である．

命題 9-3　$f \in W_{-1/2}(\mathbb{R}_x^\nu)$ が実数値であれば，$\phi^{\rm free}(f)$ は $\mathscr{F}_{\rm b,fin}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d))$ 上で本質的に自己共役である．

証明　(9.13) より，$f \in W_{-1/2}(\mathbb{R}_x^\nu)$ が実数値ならば

$$\phi^{\rm free}(f) = \sqrt{2\hbar\pi}\,\Phi_{\rm S}\left(\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right). \tag{9.23b}$$

ただし，$\Phi_{\rm S}(\cdot)$ は $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^d))$ における Segal の場の作用素である．したがって，定理 4-30 (ii) の応用により，題意がしがたう．□

以上から，$\phi^{\rm free}$ が Gårding-Wightman の公理系の (GW.1) をみたすことが示された．

9-2-4　正準共役運動量の場と鋭時刻場

自由なスカラー量子場 $\phi^{\rm free}$ の正準共役運動量の場は，作用素値超関数の意味で

$$\pi^{\rm free}(x) := \partial_{x_0}\phi^{\rm free}(x) \tag{9.24a}$$

によって定義される．$\hat{D}_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式として

$$\pi^{\rm free}(x) = i\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2(2\pi)^d}}\left(a(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) \tag{9.24b}$$

である．試料関数 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ で均した形では

$$\pi^{\text{free}}(f) = i\sqrt{\hbar\pi}\left\{a(\sqrt{\omega}Ff)^* - a(\sqrt{\omega}Ff^*)\right\} \tag{9.24c}$$

となる．

量子場 $\phi^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x}), \pi^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})$ $((t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^\nu)$ を空間変数 $\boldsymbol{x}$ の関数 f で均した量として

$$\phi^{\text{free}}(t,f) = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}\left\{a\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}e^{i\omega t}\right)^* + a\left(\frac{\widehat{f^*}}{\sqrt{\omega}}e^{i\omega t}\right)\right\}, \tag{9.25a}$$

$$\pi^{\text{free}}(t,g) = i\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}\left\{a\left(\sqrt{\omega}\hat{g}e^{i\omega t}\right)^* - a\left(\sqrt{\omega}\widehat{g^*}e^{i\omega t}\right)\right\}, \tag{9.25b}$$

を定義する．ただし，$\widehat{f^*}$ は f^* のフーリエ変換であり，この定義においては，f, g は，

$$\hat{f}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}), \quad \sqrt{\omega}\,\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}), \tag{9.26}$$

をみたす緩増加超関数なら何でもよい．作用素 $\phi^{\text{free}}(t,f), \pi^{\text{free}}(t,g)$ をそれぞれ，**時刻 t での自由な量子スカラー場，正準共役運動量の場**という．ϕ^{free} の場合と同様にして，写像：$f \longrightarrow \phi^{\text{free}}(t,f)$ および $f \longrightarrow \pi^{\text{free}}(t,f)$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ は，$(\mathscr{F}_{\text{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})), D(N_{\text{b}}^{1/2}))$ で働く，$\mathbb{R}^d$ 上の作用素値超関数であることがわかる．

任意の $h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ と $\Psi \in \mathscr{F}_{\text{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ に対して，

$$\phi^{\text{free}}(h \times f)\Psi = \int_{\mathbb{R}} h(t)\phi^{\text{free}}(t,f)\Psi\,dt, \tag{9.27a}$$

$$\pi^{\text{free}}(h \times f)\Psi = \int_{\mathbb{R}} h(t)\pi^{\text{free}}(t,f)\Psi\,dt, \tag{9.27b}$$

が成り立つ (右辺の積分は強収束の意味でのリーマン積分)．

作用素 $a(\cdot), a(\cdot)^*$ がみたす CCR によって次の事実が得られる：任意の $t \in \mathbb{R}$ と $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{F}_{\text{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$[\phi^{\text{free}}(t,f), \pi^{\text{free}}(t,g)] = i\hbar\langle f^*, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{9.28}$$

$$[\phi^{\text{free}}(t,f), \phi^{\text{free}}(t,g)] = 0, \quad [\pi^{\text{free}}(t,f), \pi^{\text{free}}(t,g)] = 0 \tag{9.29}$$

が成り立つ．

$\mathscr{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値の急減少関数の全体とすれば，これは実ベクトル空間である．(9.28), (9.29) は $\{\phi^{\text{free}}(t,f), \pi^{\text{free}}(t,f) \mid f \in \mathscr{S}_{\text{real}}(\mathbb{R}^d)\}$ が，CCR の 1 つの表現であることを示している (4-8 節を参照)．

9-3 節　ハミルトニアンと運動量作用素

(9.9) 式によって定義される関数 E_{R} から定まる，$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ における，かけ算作用素も同じ記号 E_{R} で表す．このかけ算作用素の第 2 量子化

$$H_0 := d\Gamma_{\mathrm{b}}(E_{\mathrm{R}}) \tag{9.30}$$

を考える．かけ算作用素 E_{R} は自己共役で非負であるから，H_0 は非負の自己共役作用素である．

命題 8-7 と同様にして，

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^d} E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})^* a(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} \quad (\hat{D}_{\mathscr{S}}\ \text{上}) \tag{9.31}$$

を示すことができる．これは，序章の発見法的議論で得られた形式的な表示式 (0.45) の $\hat{H}_0$ に対する厳密な意味づけをあたえる．そこで，H_0 を**自由な量子 Klein-Gordon 場のハミルトニアン**という．この命名が，実際，定義 7-2 のハミルトニアンの定義と整合的であることは次の命題によってわかる．

命題 9-4

(i)　任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$\phi^{\mathrm{free}}(f_{(t,\mathbf{0})}) = e^{itH_0/\hbar}\phi^{\mathrm{free}}(f)e^{-itH_0/\hbar},$$

$$\pi^{\mathrm{free}}(f_{(t,\mathbf{0})}) = e^{itH_0/\hbar}\pi^{\mathrm{free}}(f)e^{-itH_0/\hbar},$$

が成り立つ[4]．

(ii)　任意の $t \in \mathbb{R}$ と $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$\phi^{\mathrm{free}}(t,f) = e^{itH_0/\hbar}\phi^{\mathrm{free}}(0,f)e^{-itH_0/\hbar},$$

$$\pi^{\mathrm{free}}(t,f) = e^{itH_0/\hbar}\pi^{\mathrm{free}}(0,f)e^{-itH_0/\hbar},$$

が成り立つ．

証明　(i) 命題 4-46 を応用すれば，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$e^{itH_0/\hbar}\phi^{\mathrm{free}}(f)e^{-itH_0/\hbar} = \sqrt{\hbar\pi}\left\{a\left(\frac{e^{it\omega}Ff}{\sqrt{\omega}}\right)^* + a\left(\frac{e^{it\omega}Ff^*}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}.$$

一方，(9.11a) に基づく直接計算により，

$$Ff_{(t,\mathbf{0})} = e^{it\omega}Ff, \quad Ff^*_{(t,\mathbf{0})} = e^{it\omega}Ff^*,$$

であることがわかる．以上から，求める式が得られる．

---

[4] f_a $(a \in \mathbb{R}^\nu)$ は (7.3a) で定義される．

(ii) (i) と同様. □

(9.20a, b) と命題 9-4 によって，4 つ組 $\{\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})), \mathscr{F}_{{\rm b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})), H_0, \phi^{\rm free}\}$ は，定義 7-2 の意味で，H_0 をハミルトニアンとする量子場の理論である．

(8.30) で定義される作用素 $\hat{P}_j$ は強可換な d 個の自己共役作用素の組

$$\hat{\boldsymbol{P}} := (\hat{P}_1, \cdots, \hat{P}_d) \tag{9.32}$$

を形成する．任意のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{P}} := \sum_{j=1}^{d} a_j \hat{P}_j \tag{9.33}$$

を定義する．$\hat{\boldsymbol{P}}$ の強可換性により，$\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{P}}$ は本質的に自己共役であり，

$$e^{i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}/\hbar} = \prod_{j=1}^{d} e^{ia_j\hat{P}_j/\hbar} \tag{9.34}$$

が成立する (2 章，補題 2-33 の応用).

命題 9-4 の証明と同様にして，次の命題が証明される．

命題 9-5 任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathscr{F}_{{\rm b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$\phi^{\rm free}(f_{(0,\boldsymbol{a})}) = e^{-i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}/\hbar}\phi^{\rm free}(f)e^{i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}/\hbar}$$

が成り立つ

容易にわかるように，

$$P^{\rm free} := (H_0, \hat{\boldsymbol{P}}) \tag{9.35}$$

も強可換な自己作用素の組である．したがって，命題 9-4 と命題 9-5 により，次の事実が得られる．

命題 9-6 任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ と $a \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，$\mathscr{F}_{{\rm b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$\phi^{\rm free}(f_a) = e^{ia_0H_0/\hbar}e^{-i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}/\hbar}\phi^{\rm free}(f)e^{i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{P}}}/\hbar}e^{-ia_0H_0/\hbar}$$

が成り立つ．

こうして，4 つ組 $\{\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})), \mathscr{F}_{{\rm b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})), P^{\rm free}, \phi^{\rm free}\}$ は，7-3-5 項の意味で，並進共変な量子場の理論であることわかる．したがって，今の場合，$\hat{\boldsymbol{P}}$ は，**自由な量子 Klein-Gordon 場の運動量作用素**と解釈される．

H_0 の場合と同様にして，

$$\hat{P}_j = \int_{\mathbb{R}^d} \hbar k_j a(\boldsymbol{k})^* a(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} \quad (\hat{D}_{\mathscr{S}} \text{ 上}) \tag{9.36}$$

が示される．これは，序章の発見法的議論で得られた形式的な表示式 (0.45) の $\hat{P}_j$ に対する厳密な意味づけをあたえる．

9-4 節　エネルギー・運動量スペクトル

自由な量子 de Broglie 場の場合と同様にして，自由な量子 Klein-Gordon 場のハミルトニアンと運動量作用素のスペクトルについて，

$$\sigma(H_0) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}_l) \,\middle|\, \boldsymbol{k}_l \in \mathbb{R}^d,\, l = 1, \cdots, n \right\} \right)$$

$$= \{0\} \cup [m_0, \infty), \tag{9.37a}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_0) = \{0\}, \tag{9.37b}$$

$$\sigma(\hat{P}_j) = \mathbb{R}, \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{P}_j) = \{0\}, \tag{9.37c}$$

が成立することを示すのは難しくない．ここで，点 0 は $H_0, \hat{P}_j$ の同時固有値であり，その固有ベクトルは，定数倍を除いて，フォック真空 Ω_0 ((9.21) 式) であたえられる．

しかし，いまの場合のエネルギー・運動量スペクトル，すなわち，P^{free} の結合スペクトルは，以下に見るように，$\sigma(H_0)$, $\sigma(\hat{P}_j)$ $(j = 1, \cdots, d)$ の直積集合とはならない．

$s \geq 0$ に対して，ν 次元のエネルギー・運動量空間 $\mathbb{R}^{\nu}_{p}$ (7 章，7-3 節，7-3-5 項を参照) の部分集合を 1 つ導入する：

$$\mathbb{W}_s := \{p = (p^0, \boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^{\nu}_{p} \,|\, p^0 \geq 0,\, p^2 \geq s^2\}. \tag{9.38}$$

ここで，$p, q \in \mathbb{R}^{\nu}_{p}$ に対して，pq はミンコフスキー内積を表す (7 章，7-4 節を参照)．$n \in \mathbb{N}$ に対して，集合

$$V_m^{(n)} := \left\{ \left(\sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}_l), \sum_{l=1}^{n} \hbar \boldsymbol{k}_l \right) \in \mathbb{R}^{\nu} \,\middle|\, \boldsymbol{k}_l \in \mathbb{R}^d,\, l = 1, \cdots, n \right\}. \tag{9.39}$$

を導入する．V_{m_0} を質量 m_0 のを質量超双曲面とすれば (2 章，例 2-1，(2.25) 式を参照)，$V_{m_0} = V_m^{(1)}$ である．

定理 9-7　$m \geq 0$ とする．このとき，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(P^{\text{free}}) = \{0\} \cup \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_m^{(n)} \right)} = \{0\} \cup V_{m_0} \cup \mathbb{W}_{2m_0}$$

$$= \{0\} \cup V_m^{(1)} \cup V_m^{(2)}.$$

証明　(8.50) を得たのと全く同じ論法により,

$$\sigma_{\mathrm{J}}(P^{\mathrm{free}}) = \{0\} \cup \overline{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_m^{(n)}\right)}$$

が示される. $V_{m_0} = V_m^{(1)}$ である. また, 容易にわかるように, $\mathbb{W}_{2m_0}$ は閉集合である. したがって,

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} V_m^{(n)} = \mathbb{W}_{2m_0} = V_m^{(2)} \qquad (*)$$

が証明されれば, 題意の式がすべてしたがう. そこで, これを証明する.

$n \geq 2$ とし, $p_n \in V_m^{(n)}$ ならば,

$$p_n = \left(\sum_{l=1}^{n} E_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{k}_l), \sum_{l=1}^{n} \hbar \boldsymbol{k}_l\right) \in \mathbb{R}_p^{\nu}$$

となる $\boldsymbol{k}_l \in \mathbb{R}^d$ がある $(l = 1, \cdots, n)$. したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{p_n^2}{\hbar^2} &= \left(\sum_{l=1}^{n} \omega(\boldsymbol{k}_l)\right)^2 - \left|\sum_{l=1}^{n} \boldsymbol{k}_l\right|^2 \\
&= \sum_{l=1}^{n} \omega(\boldsymbol{k}_l)^2 + 2\sum_{l<r} \omega(\boldsymbol{k}_l)\omega(\boldsymbol{k}_r) - \sum_{l=1}^{n} |\boldsymbol{k}_l|^2 - 2\sum_{j<r} \boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{k}_r \\
&= nm^2 + 2\sum_{j<r} (\omega(\boldsymbol{k}_l)\omega(\boldsymbol{k}_r) - \boldsymbol{k}_l \cdot \boldsymbol{k}_r) \\
&\geq nm^2 + 2\sum_{j<r} (\omega(\boldsymbol{k}_l)\omega(\boldsymbol{k}_r) - |\boldsymbol{k}_l||\boldsymbol{k}_r|).
\end{aligned}$$

そこで, 容易に証明される不等式

$$\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}') - |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}'| \geq m^2, \quad \boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}' \in \mathbb{R}^d,$$

を用いると,

$$p_n^2 \geq (nm_0)^2 \geq (2m_0)^2, \quad n \geq 2$$

が得られる. これは, $V_m^{(n)} \subset \mathbb{W}_{2m_0}$ $(n \geq 2)$ を意味する. したがって, $\bigcup_{n=2}^{\infty} V_m^{(n)} \subset \mathbb{W}_{2m_0}$. 特に, $V_m^{(2)} \subset \mathbb{W}_{2m_0}$.

この逆の包含関係を示すために, $p \in \mathbb{W}_{2m_0}$ とする. $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上の関数 $f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2)$

$$f(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2) := \hbar^2\{\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_2) - \boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2\}$$

は連続であり，その値域は $[m_0^2,\infty)$ である．いま，$p^2 \geq (2m_0)^2 = 4m_0^2$ であるから，

$$p^2 = 2f(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) + 2m_0^2$$

をみたす $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ が存在する．そこで，$q_l := (\hbar\omega(\boldsymbol{k}_l),\hbar\boldsymbol{k}_l)$ $(l=1,2)$, $q := q_1+q_2$ とおけば，$q^2=p^2$．したがって，$p=\Lambda q=\Lambda q_1+\Lambda q_2$ となる Lorentz 変換 $\Lambda\in\mathscr{L}_+^{\uparrow}$ がある．q_1, $q_2\in V_m^{(1)}=V_{m_0}$ であるから，$\Lambda q_l = (\hbar\omega(\boldsymbol{k}'_l),\hbar\boldsymbol{k}'_l)$ $(l=1,2)$ となる $\boldsymbol{k}'_l\in\mathbb{R}^d$ が存在する．したがって，$p=\hbar(\omega(\boldsymbol{k}'_1)+\omega(\boldsymbol{k}'_2),\boldsymbol{k}'_1+\boldsymbol{k}'_2)\in V_m^{(2)}$．いまの結果は，$V_m^{(2)}\supset\mathbb{W}_{2m_0}$ を意味する．これと前段で得た結果により，$(*)$ が示されたことになる．　□

定理 9-7 により，自由な量子 Klein-Gordon 場のエネルギー・運動量スペクトルは，固有 Lorentz 変換に対して不変であることがわかる．特に，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(P^{\mathrm{free}})\subset\overline{V}_+. \tag{9.40}$$

ここで，V_+ は前方光円錐である ((7.22) を参照)．つまり，自由な量子 Klein-Gordon 場は，Gårding-Wightman の公理系のスペクトル条件 (GW.3) をみたす．

$m=0$ ならば，$V_0\cup V_0^{(2)}=\overline{V}_+$ であるから，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(P^{\mathrm{free}})=\overline{V}_+$$

である．

$n\geq 1$ に対して，集合 $V_m^{(n)}$ は，n 粒子状態のエネルギー・運動量スペクトルを表す．

9-5 節　Poincaré 共変性

9-5-1　Poincaré 群のユニタリ表現

ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上に固有 Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^{\uparrow}$ のユニタリ表現を構成する (7 章，7-4 節を参照)．

質量超双曲面 V_m から $\mathbb{R}^d$ への写像 j_m を

$$j_m(k_0,\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{k},\quad (k_0,\boldsymbol{k})\in V_m,$$

によって定義する．これは同相写像である．V_m の部分集合の族

$$\boldsymbol{B}_m := \{B\cap V_m \mid B\in\boldsymbol{B}^\nu\}$$

は，V_m において，ボレル集合体をなす．任意の $E\in\boldsymbol{B}_m$ に対して，

$$\mu_m(E) := \int_{j_m(E)} \frac{1}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}$$

を定義する．μ_m が可測空間 $(V_m, \boldsymbol{B}_m)$ 上の測度であることは容易に確かめられる．次の事実は基本的である．

補題 9-8 測度 μ_m は，$\mathscr{L}_+^\uparrow$-不変である．すなわち，任意の $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ と $E \in \boldsymbol{B}_m$ に対して，

$$\mu_m(E) = \mu_m(\Lambda E) \tag{9.41}$$

が成立する．ただし，$m = 0$ の場合は，$d \geq 2$ とする．

証明 まず，$m > 0$ の場合を考える．$f \in C_0^\infty(0,\infty)$ に対して，$\mathbb{R}_k^\nu$ 上の測度 ρ_f を

$$\rho_f(B) := 2\int_B f(k^2)\chi(k)\, dk, \quad B \in \boldsymbol{B}^\nu,$$

によって定義する．ただし，χ は，前方光円錐の閉包 $\overline{V}_+$ の定義関数である．明らかに，$\operatorname{supp}\rho_f \subset \overline{V}_+$．任意の $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，$(\Lambda k)^2 = k^2$ $(k \in M^\nu)$ であり，$\det \Lambda = 1$ である．さらに，$\overline{V}_+$ は $\mathscr{L}_+^\uparrow$-不変であることを使うと，$\rho_f(B) = \rho_f(\Lambda B)$ が成り立つことがわかる．すなわち，ρ_f は $\mathscr{L}_+^\uparrow$-不変な測度である．写像 $h : V_+ \longrightarrow \mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \times [0,\infty)$ を

$$h(k) := (\boldsymbol{k}, y), \quad k \in V_+,\ y = k^2,$$

によって定義する．容易にわかるように，h は同相写像である．この変換のヤコビアン $|\partial h(k)/\partial(k_0, \boldsymbol{k})|$ は $2k_0$ であるので，任意のボレル可測集合 $B \subset V_+$ に対して，

$$\rho_f(B) = \int_{h(B)} \frac{f(y)}{\sqrt{y + \boldsymbol{k}^2}}\, d\boldsymbol{k}dy$$

となる．さて，$v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} v(y)\, dy = 1$ であるものをとり，

$$f_n(y) := nv(n(y - m^2))$$

とおく $(n \in \mathbb{N})$．このとき，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$f_n \in C_0^\infty(0,\infty)$ であり，超関数の収束の意味で，$f_n(y) \longrightarrow \delta(y - m^2)$ $(n \longrightarrow \infty)$(付録 D，例 D-8 を参照)．任意の $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_k^\nu)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} g(k)\, d\rho_{f_n}(k) = 2\int_{\mathbb{R}^\nu} g(k) f_n(k^2)\chi(k)\, dk$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d \times [0,\infty)} g(h^{-1}(\boldsymbol{k}, y)) \frac{f_n(y)}{\sqrt{y + \boldsymbol{k}^2}} \, d\boldsymbol{k} dy$$

$$\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(h^{-1}(\boldsymbol{k}, m^2))}{\omega(\boldsymbol{k})} \, d\boldsymbol{k}$$

$$= \int_{V_m} g(k) \, d\mu_m(k).$$

ρ_f の $\mathscr{L}_+^\uparrow$-不変性により，任意の $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} g(\Lambda^{-1} k) \, d\rho_{f_n}(k) = \int_{\mathbb{R}^\nu} g(k) \, d\rho_{f_n}(k).$$

したがって，$n \longrightarrow \infty$ として，

$$\int_{V_m} g(\Lambda^{-1} k) \, d\mu_m(k) = \int_{V_m} g(k) \, d\mu_m(k). \tag{9.42}$$

いま $B = (a_0, b_0] \times (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ $(-\infty < a_\mu < b_\mu < \infty)$ とし，$E = B \cap V_m$ とおく．χ_B を B の定義関数とすれば，$g_n(k) \longrightarrow \chi_B(k)$ $(n \longrightarrow \infty)$(a.e. k) となる $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}_k^\infty)$ で n に関して一様有界なものがとれる[5)]．上の式より，

$$\int_{V_m} g_n(\Lambda^{-1} k) \, d\mu_m(k) = \int_{V_m} g_n(k) \, d\mu_m(k).$$

ルベーグの優収束定理を応用すると，$n \longrightarrow \infty$ のとき，左辺は $\mu_m(\Lambda E)$ に収束し，右辺は $\mu_m(E)$ に収束する．したがって，(9.41) が成立する．V_m のボレル集合体 $\boldsymbol{B}_m$ は，いま考えた形の集合 E によって生成されるから，すべての $E \in \boldsymbol{B}_m$ に対して，(9.41) が成立することになる．

次に $m = 0$ の場合に (9.41) が成立することを示す．積分

$$\int_{V_m} g(k) \, d\mu_m(k) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}, \boldsymbol{k})}{\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}} \, d\boldsymbol{k}$$

の $m \longrightarrow 0$ の極限を考察する．g の連続性により，

$$\lim_{m \to 0} \frac{g(\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}, \boldsymbol{k})}{\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}} = \frac{g(|\boldsymbol{k}|, \boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\},$$

であり，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\left| \frac{g(\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}, \boldsymbol{k})}{\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}} \right| = \left| (1 + (\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2})^2 + |\boldsymbol{k}|^2)^n g(\sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}, \boldsymbol{k}) \right|$$

---

5) たとえば，黒田 (1980) の p.120，補題 6.8 を，$u = \chi_B$ として，応用せよ．

$$\times \frac{1}{\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}(1+(\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2})^2+|\boldsymbol{k}|^2)^n}$$
$$\leq \frac{C_n}{|\boldsymbol{k}|(1+|\boldsymbol{k}|^2)^n}$$

が成り立つ．ただし，

$$C_n := \sup_{k\in\mathbb{R}^\nu}(1+|k|^2)^n|g(k)|.$$

$n>(d-1)/2$ とすれば，$\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\,[|\boldsymbol{k}|(1+|\boldsymbol{k}|^2)^n]^{-1}<\infty$ ($m=0$ のときは，$d\geq 2$ と仮定していることに注意)．よって，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{m\to 0}\int_{V_m} g(k)\,d\mu_m(k) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{g(|\boldsymbol{k}|,\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}\,d\boldsymbol{k} = \int_{V_0} g(k)\,d\mu_0(k).$$

そこで，(9.42) において，$m\longrightarrow 0$ とすれば，

$$\int_{V_0} g(\Lambda^{-1}k)\,d\mu_0(k) = \int_{V_0} g(k)\,d\mu_0(k)$$

が得られる．あとは，$m>0$ の場合と同様の論法により，(9.41) が得られる． □

注意 9-2　物理学の多くの文献では，測度 μ_m のことを象徴的な記号 $2\theta(k_0)\delta(k^2-m^2)\,dk$ ($\theta(\cdot)$ は Heaviside 関数，付録 D の例 D-11 を参照) で表し，このことから，この測度が Lorentz 不変であるとしている．補題 9-8 は，この主張に対する厳密な定式化と証明をあたえるものである．

各 $(a,\Lambda)\in\mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ 上の作用素 $u(a,\Lambda)$ を

$$(u(a,\Lambda)f)(\boldsymbol{k}) = e^{ia_0\omega(\boldsymbol{k})-i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_\Lambda)}{\omega(\boldsymbol{k})}}\,f(\boldsymbol{k}_\Lambda) \qquad (9.43)$$

によって定義する．ただし，$\boldsymbol{k}=(k^1,\cdots,k^d)$ と表すとき (相対論的記法)，

$$(\boldsymbol{k}_\Lambda)^j = (\Lambda^{-1})^j{}_0\,\omega(\boldsymbol{k}) + \sum_{l=1}^d(\Lambda^{-1})^j_l k^l. \qquad (9.44)$$

命題 9-9　$\{u(a,\Lambda)\,|\,(a,\Lambda)\in\mathscr{P}_+^\uparrow\}$ は，表現空間を $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ とする，$\mathscr{P}_+^\uparrow$ のユニタリ表現である．

証明　まず，$\tilde{k}:=(\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})$ とおくと，任意の $\Lambda\in\mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，

$$\Lambda^{-1}\tilde{k} = (\omega(\boldsymbol{k}_\Lambda),\boldsymbol{k}_\Lambda)$$

に注意する．

任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ に対して，$g(k) = k_0|f(\boldsymbol{k})|^2$ $(k = (k_0, \boldsymbol{k}))$ とおくと

$$\|u(a,\Lambda)f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k} \frac{\omega(\boldsymbol{k}_\Lambda)}{\omega(\boldsymbol{k})}|f(\boldsymbol{k}_\Lambda)|^2 = \int_{V_m} g(\Lambda^{-1}k)\, d\mu_m(k)$$

と書ける．補題 9-8 によって，右辺は，$\int_{V_m} g(k)\, d\mu_m(k) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{k})|^2\, d\boldsymbol{k}$ に等しい．したがって，$u(a,\Lambda)$ は等長写像である．

任意の (a_1,Λ_1), $(a_2,\Lambda_2) \in \mathscr{P}^\uparrow_+$ に対して，

$$\begin{aligned}(u(a_1,\Lambda_1)u(a_2,\Lambda_2)f)(\boldsymbol{k}) &= e^{ia_1\tilde{k}}\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda_1})}{\omega(\boldsymbol{k})}}\,(u(a_2,\Lambda_2)f)(\boldsymbol{k}_{\Lambda_1}) \\ &= e^{ia_1\tilde{k}}e^{ia_2\tilde{k}_{\Lambda_1}}\sqrt{\frac{\omega((\boldsymbol{k}_{\Lambda_1})_{\Lambda_2})}{\omega(\boldsymbol{k})}}f((\boldsymbol{k}_{\Lambda_1})_{\Lambda_2}).\end{aligned}$$

ただし，$\tilde{k}_{\Lambda_1} := (\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda_1}), \boldsymbol{k}_{\Lambda_1}) = \Lambda_1^{-1}\tilde{k}$．したがって，$a_2\tilde{k}_{\Lambda_1} = (\Lambda_1 a_2)\tilde{k}$．$\boldsymbol{k}_\Lambda$ の定義にしたがって直接計算すれば

$$(\boldsymbol{k}_{\Lambda_1})_{\Lambda_2} = \boldsymbol{k}_{\Lambda_1\Lambda_2}$$

が成立することがわかる．ゆえに，

$$\begin{aligned}(u(a_1,\Lambda_1)u(a_2,\Lambda_2)f)(\boldsymbol{k}) &= e^{i(a_1+\Lambda_1 a_2)\tilde{k}}\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda_1\Lambda_2})}{\omega(\boldsymbol{k})}}\,f(\boldsymbol{k}_{\Lambda_1\Lambda_2}) \\ &= (u(a_1 + a_2\Lambda_1, \Lambda_1\Lambda_2)f)(\boldsymbol{k}) \\ &= [u\left((a_1,\Lambda_1)(a_2,\Lambda_2)\right) f](\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

よって，

$$u(a_1,\Lambda_1)u(a_2,\Lambda_2) = u\left((a_1,\Lambda_1)(a_2,\Lambda_2)\right).$$

これは u の準同型性を示す．特に，$(a_2,\Lambda_2) = (a_1,\Lambda_1)^{-1}$ にとれば，

$$u(a_1,\Lambda_1)u((a_1,\Lambda_1)^{-1}) = I$$

になるので，$u(a_1,\Lambda_1)$ は全射である．以上から，$u(a,\Lambda)$ はユニタリであることがわかる．

次に対応：$(a,\Lambda) \longrightarrow u(a,\Lambda)$ の強連続性を示す．(a_n,Λ_n), $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}^\uparrow_+$ で $(a_n,\Lambda_n) \longrightarrow (a,\Lambda)$ $(n \longrightarrow \infty)$ としよう．任意の f, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle f, u(a_n, \Lambda_n)g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ia_n\tilde{k}} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}_{\Lambda_n})\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda_n})}{\omega(\boldsymbol{k})}}\, d\boldsymbol{k}.$$

容易にわかるように,

$$\lim_{n\to\infty} e^{ia_n\tilde{k}} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}_{\Lambda_n})\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda_n})}{\omega(\boldsymbol{k})}} = e^{ia\tilde{k}} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}_{\Lambda})\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda})}{\omega(\boldsymbol{k})}}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\}.$$

また,

$$\left| e^{ia_n\tilde{k}} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}_{\Lambda_n})\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda_n})}{\omega(\boldsymbol{k})}} \right| \le C\frac{|f(\boldsymbol{k})|}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}.$$

ただし，$C := \sup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d} |g(\boldsymbol{k})|\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}$ (これは有限量である). $\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}\, \frac{|f(\boldsymbol{k})|}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} < \infty$ であるから，ルベーグの優収束定理が応用できて,

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, u(a_n, \Lambda_n)g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ia\tilde{k}} f(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}_{\Lambda})\sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{k}_{\Lambda})}{\omega(\boldsymbol{k})}}\, d\boldsymbol{k} = \langle f, u(a, \Lambda)g\rangle$$

が得られる．そこで，補題 7-11 を応用すれば，$u(a, \Lambda)$ の強連続性が示される． □

作用素 $u(a, \Lambda)$ の第 2 種の第 2 量子化

$$U_{\mathrm{b}}(a, \Lambda) := \Gamma(u(a, \Lambda)) \tag{9.45}$$

を考える．容易にわかるように

$$U_{\mathrm{b}}(a, I) = e^{ia^0 H_0/\hbar} e^{-ia^1 \hat{P}_1/\hbar} \cdots e^{-ia^d \hat{P}_d/\hbar} \tag{9.46}$$

である．ただし，$a = (a^0, a^1, \cdots, a^d)$ と表す (相対論的記法).

命題 9-10

(i) $\{U_{\mathrm{b}}(a, \Lambda) \,|\, (a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow\}$ は，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ における，$\mathscr{P}_+^\uparrow$ のユニタリ表現である．

(ii) すべての $(a, \Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して,

$$U_{\mathrm{b}}(a, \Lambda)\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})} = \Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}.$$

(iii) すべての $U_{\mathrm{b}}((t, \boldsymbol{0}), I)$ $(t \in \mathbb{R})$ で不変となるベクトルは $\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}$ の定数倍に限られる．

証明 (i) 第 2 種の第 2 量子化作用素の特性 (定理 4-16 (ii), (iv), (v)) と命題 9-9 を組み合わせればよい．

(ii) は第 2 種の第 2 量子化作用素の定義より明らか.

(iii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $U_{\mathrm{b}}((t,\mathbf{0}),I)\Psi = \Psi$ をみたすベクトル Ψ があったとする. (9.46) によって, $e^{itH_0}\Psi = \Psi$. そこで, $t=0$ での微分を考えると, $\Psi \in D(H_0)$ かつ $H_0\Psi = 0$ を得る. H_0 の固有値 0 に属する固有ベクトルは $\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}$ の定数倍に限られるから, $\Psi = \lambda\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}$ (λ は定数) となる. □

9-5-2　場の Poincaré 共変性

$(a,\Lambda) \in \mathscr{P}^{\uparrow}_{+}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ とする. 命題 4-46 によって, $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で,

$$U_{\mathrm{b}}(a,\Lambda)\phi^{\mathrm{free}}(f)U_{\mathrm{b}}(a,\Lambda)^{-1} = \sqrt{\hbar\pi}\left\{a\left(u(a,\Lambda)\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right)^{*} + a\left(u(a,\Lambda)\frac{Ff^{*}}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}$$

が成り立つ. 直接計算により,

$$\left(u(a,\Lambda)\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right)(\boldsymbol{k}) = \frac{Ff_{(a,\Lambda)}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} \tag{9.47}$$

であることが示される. ただし, $f_{(a,\Lambda)}$ は (7.20) で定義したものである. したがって, $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で,

$$U_{\mathrm{b}}(a,\Lambda)\phi^{\mathrm{free}}(f)U_{\mathrm{b}}(a,\Lambda)^{-1} = \phi^{\mathrm{free}}(f_{(a,\Lambda)}) \tag{9.48}$$

が成立する. これを作用素値超関数核 $\phi^{\mathrm{free}}(x)$ を使って書けば,

$$U_{\mathrm{b}}(a,\Lambda)\phi^{\mathrm{free}}(x)U_{\mathrm{b}}(a,\Lambda)^{-1} = \phi^{\mathrm{free}}(\Lambda x + a) \tag{9.49}$$

ということである. (9.48) は, 自由な量子 Klein-Gordon 場の Poincaré 共変性を表す.

9-6 節　場の交換関係と Lorentz 不変な超関数

この節では, 自由な量子 Klein-Gordon 場の交換関係を調べ, 自由な量子 Klein-Gordon 場が微視的因果律 — Gårding-Wightman の公理系の (GW.4) — をみたすことを証明しよう.

(9.13) から, 任意の $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{\nu}_x)$ に対して, $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で, 交換関係

$$[\phi^{\mathrm{free}}(f), \phi^{\mathrm{free}}(g)] = i\hbar[D_{+}(f,g) - D_{+}(g,f)] \tag{9.50}$$

が成立する[6). ただし,

---

6) 右辺の定数係数の取り方 ($i\hbar$) は, 物理の文献の慣習にしたがう.

$$D_+(f,g) := -i\pi\left\langle \frac{Ff^*}{\sqrt{\omega}}, \frac{Fg}{\sqrt{\omega}}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = -i\pi\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\hat{f}(\omega(\boldsymbol{k}),-\boldsymbol{k})\hat{g}(-\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k}. \tag{9.51}$$

(9.51) の右辺は次のように変形される：

$$\begin{aligned} D_+(f,g) &= -i\pi\lim_{\kappa\to\infty}\int_{|\boldsymbol{k}|\le\kappa}\frac{\hat{f}(\omega(\boldsymbol{k}),-\boldsymbol{k})\hat{g}(-\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k} \\ &= \lim_{\kappa\to\infty}\int_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} f(x)g(y)\Delta_{+,\kappa}(x-y)\,dxdy. \end{aligned} \tag{9.52}$$

ただし，

$$\Delta_{+,\kappa}(t,\boldsymbol{x}) := \frac{1}{2(2\pi)^d i}\int_{|\boldsymbol{k}|\le\kappa}\frac{e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k}, \quad (t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^\nu. \tag{9.53}$$

容易にわかるように，$\Delta_{+,\kappa}(t,\boldsymbol{x})$ は，$\mathbb{R}^\nu$ 上の有界な連続関数である[7]．したがって，特に，各 $t\in\mathbb{R}$ ごとに，$\Delta_{+,\kappa}(t,\cdot)$ は $\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}$ 上の緩増加超関数と見ることができる (付録 D の例 D-1 を参照)．これを $\Delta_{+,\kappa}(t,u)$ ($u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$) と記す：

$$\Delta_{+,\kappa}(t,u) := \frac{1}{2(2\pi)^{d/2} i}\int_{|\boldsymbol{k}|\le\kappa}\frac{e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}\check{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k}. \tag{9.54}$$

ここで，$\check{u}$ は u の逆フーリエ変換である．また，

$$\Delta_+(t,u) := \frac{1}{2(2\pi)^{d/2} i}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}\check{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k} \tag{9.55}$$

とすれば，$u \longrightarrow \Delta_+(t,u)$ は $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ 上の連続線形汎関数である．すなわち，$\Delta_+(t,\cdot)\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$．ルベーグの優収束定理を応用することにより，

$$\lim_{\kappa\to\infty}\Delta_{+,\kappa}(t,u) = \Delta_+(t,u), \quad t\in\mathbb{R},\ u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}), \tag{9.56}$$

を示すことができる．

さらに，写像：

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(\mathbb{R}_t)\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \ni (v,u) &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}}\Delta_+(t,u)v(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2} i}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\hat{v}(\omega(\boldsymbol{k}))\check{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{9.57}$$

は分離連続な双線形汎関数である．したがって，シュヴァルツの核定理 (付録 D，定理 D-4) により，

---

[7] さらに，$\mathbb{R}^\nu$ 上で無限回微分可能である．

$$\Delta_+(v \times u) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_+(t, u) v(t)\, dt \tag{9.58}$$

をみたす $\Delta_+ \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^\nu_{\boldsymbol{x}})$ がただ 1 つ存在する．

写像

$$L : f \longrightarrow \frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2} i} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(Ff)(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}$$

$(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x))$ は緩増加超関数であり，$L(v \times u) = \Delta_+(v \times u)$ $(v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), u \in \mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ が成り立つ．したがって，シュヴァルツの核定理 (付録 D，定理 D-4) の一意性により，$L = \Delta_+$．ゆえに，超関数 Δ_+ は，具体的に，

$$\Delta_+(f) = \frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2} i} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(Ff)(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x), \tag{9.59}$$

であたえられる．

一般に，$\mathbb{R}^\nu$ 上の関数 ϕ と $\Lambda \in \mathscr{L}^\uparrow_+$ に対して，関数 ϕ_Λ を

$$\phi_\Lambda(x) := \phi_{(0,\Lambda)}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^\nu, \tag{9.60}$$

によって定義する．

$\mathbb{R}^\nu$ 上の関数 ϕ が，すべての $\Lambda \in \mathscr{L}^\uparrow_+$ に対して，$\phi_\Lambda = \phi$ をみたすとき，ϕ は **Lorentz 不変**であるという．この概念は，超関数に対しても定義される：$\mathbb{R}^\nu$ 上の超関数 ϕ について，$\phi(f_\Lambda) = \phi(f)$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), \Lambda \in \mathscr{L}^\uparrow_+)$ が成り立つとき，ϕ は **Lorentz 不変**であるという．このことを象徴的に，

$$\phi(\Lambda x) = \phi(x), \quad \Lambda \in \mathscr{L}^\uparrow_+,$$

と記す．

任意の Lorentz 変換 $\Lambda \in \mathscr{L}^\uparrow_+$ に対して，(9.47) により，

$$\Delta_+(f_\Lambda) = \frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2} i} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} \left(u(0,\Lambda) \frac{Ff}{\sqrt{\omega}} \right)(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x). \tag{9.61}$$

一方，(9.43) と測度 $d\mu_m$ の Lorentz 不変性 (補題 9-8) を使うと，$g/\omega \in L^1(\mathbb{R}^d)$ をみたす任意のボレル可測関数 g に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}} (u(0,\Lambda) g)(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}\, d\boldsymbol{k} \tag{9.62}$$

がわかる．実際，$h(k) = \sqrt{k_0}\, g(\boldsymbol{k})$ $(k_0 > 0, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d)$ とおけば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}(u(0,\Lambda)g)(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} = \int_{V_m} h(\Lambda^{-1}k)\,d\mu_m(k) = \int_{V_m} h(k)\,d\mu_m(k)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}\,d\boldsymbol{k}.$$

(9.62) を $g = Ff/\sqrt{\omega}$ として応用すれば，(9.61) の右辺は

$$\frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2}i}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{(Ff)(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k} = \Delta_+(f)$$

となるので，

$$\Delta_+(f_\Lambda) = \Delta_+(f), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x),\ \Lambda \in \mathscr{L}^\uparrow_+, \tag{9.63}$$

が得られる．したがって，超関数 Δ_+ は Lorentz 不変である．(9.17) と (9.59) を用いると，Δ_+ は，超関数の意味で，自由な Klein-Gordon 方程式をみたすことがわかる：

$$(\Box + m^2)\Delta_+(x) = 0. \tag{9.64}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 u に対して，その**空間反転** (space inversion) $I_s u$ を

$$(I_s u)(\boldsymbol{x}) := u(-\boldsymbol{x}) \tag{9.65}$$

によって定義する．(9.55) から，

$$\Delta_+(t, I_s u) = \Delta_+(t,u), \quad u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}), \tag{9.66}$$

がわかる．すなわち，超関数 $\Delta_+(t,\cdot)$ は空間反転不変である．このことを象徴的に書けば，

$$\Delta_+(t,\boldsymbol{x}) = \Delta_+(t,-\boldsymbol{x}). \tag{9.67}$$

(9.55) は

$$\Delta_+(t,\boldsymbol{x})^* = -\Delta_+(-t,-\boldsymbol{x}) \tag{9.68}$$

を導く[8]．

$\theta(t)$ を Heaviside 関数 (付録 D，例 D-11 を参照) とし，

$$\Delta_F(t,u) := \theta(t)\Delta_+(t,u) + \theta(-t)\Delta_+(-t, I_s u) \tag{9.69}$$

を導入する．このとき，容易にわかるように，写像：

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}_t) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \ni (v,u) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \Delta_F(t,u)v(t)\,dt$$

---

[8] 超関数の共役や変数変換については，付録 D の D-1 節を参照.

$$= \frac{1}{2(2\pi)^{d/2}i}\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left(\int_0^\infty v(t)e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t}\,dt\right)\check{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k}\right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\left(\int_{-\infty}^0 v(t)e^{i\omega(\boldsymbol{k})t}dt\right)\hat{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k}\right\} \quad (9.70)$$

は分離連続な双線形汎関数である．したがって，シュヴァルツの核定理 (付録 D，定理 D-4) により，

$$\Delta_{\mathrm{F}}(v \times u) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_{\mathrm{F}}(t,u)v(t)\,dt \qquad (9.71)$$

をみたす $\Delta_{\mathrm{F}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\nu}_{\boldsymbol{x}})$ がただ 1 つ存在する．この超関数 Δ_{F} を — これは以下で見るように大域的には関数ではないが — 歴史的な経緯により，慣習的に，**自由な Klein-Gordon 場に対する Feynman の伝播関数**（でんぱ） (propagator) あるいは**因果的 Green 関数**という．超関数の意味で

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \theta(x_0)\Delta_+(x) + \theta(-x_0)\Delta_+(-x) \qquad (9.72)$$

である．

超関数 Δ_+ の定義と空間反転不変性 (9.66) と (9.68) および

$$\theta(x_0) + \theta(-x_0) = 1, \quad x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \qquad (9.73)$$

を使うと，(9.72) より，

$$\Delta_+(x) = \theta(x_0)\Delta_{\mathrm{F}}(x) - \theta(-x_0)\Delta_{\mathrm{F}}(x)^* \qquad (9.74)$$

が導かれる．

超関数 Δ_{F} の陽な形を求めよう．そうすれば，(9.74) により，Δ_+ の陽な形もわかることになる．

任意の $a > 0$ に対して成立する公式

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik_0t}}{(k_0)^2 - a^2 + i\varepsilon}\,dk_0 = \frac{\pi}{ia}e^{-ia|t|} \qquad (9.75)$$

— これは留数定理により簡単に証明できる — を用いると，

$$\frac{e^{-i\omega(\boldsymbol{k})|t|}}{\omega(\boldsymbol{k})} = \frac{i}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{e^{ik_0t}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\,dk_0$$

($k^2 = k_0^2 - \boldsymbol{k}^2$) である．これと (9.70), (9.71) から，

$$\Delta_{\mathrm{F}}(v \times u) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}_k^\nu} \frac{(\mathscr{F}_\nu^{-1} v \times u)(k)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\, dk \tag{9.76}$$

が得られる ($\mathscr{F}_\nu^{-1}$ は ν 次元の逆フーリエ変換). これは, Δ_{F} が緩増加超関数 $(2\pi)^{-\nu/2}(k^2 - m^2 + i0)^{-1}$ の逆フーリエ変換であることを意味する[9]:

$$\Delta_{\mathrm{F}} = (2\pi)^{-\nu/2} \mathscr{F}_\nu^{-1}(k^2 - m^2 + i0)^{-1}. \tag{9.77}$$

これを象徴的に書けば,

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2 - m^2 + i0}\, dk. \tag{9.78}$$

この事実から,

$$(\Box + m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x - y) = -\delta(x - y) \tag{9.79}$$

が導かれる. すなわち, $-\Delta_{\mathrm{F}}$ は, 自由な Klein-Gordon 方程式の基本解の 1 つである.

(9.77) から, Δ_{F} は Lorentz 不変な超関数であることもわかる[10].

一般に, $\mathbb{R}^n$ 上の実の 2 次形式 P と複素数 λ から決まる緩増加超関数 $(c^2 + P + i0)^\lambda$ ($c > 0$ は定数) (付録 D の例 D-9 を参照) のフーリエ変換は特殊関数を使って表示することが可能であり, すでに詳しく調べられている (Gel'fand and Shilov (1964) の 3 章, §2.8). ここでは, 結果だけを引用する. Gel'fand and Shilov (1964), p.290 の (11) を応用することにより (そこでの P, λ, c として, $P(k) = -k^2$, $\lambda = -1$, $c = m^2$ をとる),

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{F}}(x) = -i(2\pi)^{-\nu/2} m^{\frac{\nu}{2}-1} \Big\{ &(-x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)} K_{\frac{\nu}{2}-1}(m(-x^2)_+^{1/2}) \\ &- \frac{\pi i}{2}(x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)} H^{(2)}_{1-\frac{\nu}{2}}(m(x^2)_+^{1/2}) \Big\}.\end{aligned} \tag{9.80}$$

ただし, $K_\alpha(z)$ は変形された Bessel 関数, $H_\alpha^{(2)}(z)$ は第 2 種の Hankel 関数[11], $(x^2)_+^\lambda$ は $(x^2)_+^\lambda(f) := \int_{x^2>0} (x^2)^\lambda f(x)\, dx$ ($f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^\nu)$) によって定義される, $\mathbb{R}^\nu$ 上の緩増加超関数である[12]. したがって, (9.74) によって,

$$\Delta_+(x) = -i(2\pi)^{-\nu/2} m^{\frac{\nu}{2}-1} (-x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)} K_{\frac{\nu}{2}-1}(m(-x^2)_+^{1/2})$$

---

[9] 超関数 $(k^2 - m^2 + i0)^{-1}$ については, 付録 D の例 D-9 を参照.

[10] 変数変換 $k_0 \longrightarrow -k_0$ をすると, ユークリッド内積 $k \cdot x = k_0 x_0 + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$ は $-kx = -k_0 x_0 + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$ (kx はミンコフスキー内積) に変わることに注意.

[11] たとえば, 森口繁一ほか『数学公式 III』(岩波書店) の第 VI 篇 Bessel 函数の項を参照.

[12] 付録 D の例 D-7 において, $P(x) = x^2 = x_0^2 - \boldsymbol{x}^2$ の場合の超関数 P_+^λ.

$$- \frac{\pi}{2}(2\pi)^{-\nu/2} m^{\frac{\nu}{2}-1} \varepsilon(x^0)(x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)} J_{1-\frac{\nu}{2}}(m(x^2)_+^{1/2})$$

$$+ \frac{\pi i}{2}(2\pi)^{-\nu/2} m^{\frac{\nu}{2}-1} (x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)} N_{1-\frac{\nu}{2}}(m(x^2)_+^{1/2}). \tag{9.81}$$

と表される．ここで，

$$\varepsilon(t) := \theta(t) - \theta(-t) \quad \text{(符号関数)} \tag{9.82}$$

であり，$z > 0$ に対して，

$$H_\alpha^{(2)}(z)^* = H_\alpha^{(1)}(z), \quad K_\alpha(z)^* = K_\alpha(z),$$

であること，および

$$H_\alpha^{(1)}(z) = J_\alpha(z) + iN_\alpha(z), \quad H_\alpha^{(2)}(z) = J_\alpha(z) - iN_\alpha(z),$$

を用いた ($J_\alpha(z)$ は第 1 種円柱関数，$H_\alpha^{(1)}(z)$，$H_\alpha^{(2)}(z)$ はそれぞれ，第 1 種ハンケル関数，第 2 種ハンケル関数)．

注意 9-3　(9.80), (9.81) に現れている超関数 $(\pm x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)}$ は $\{x \in \mathbb{R}^\nu \mid x^2 = 0\}$ においてデルタ超関数 $\delta(x^2)$ およびその導超関数の 1 次結合で表される特異性をもちうる (Gel'fand and Shilov (1964) の 3 章，§2.2 を参照)．したがって，Δ_{F}, Δ_+ もそのような特異性をもちうる．しかし，$\mathbb{R}^\nu \setminus \{x \in \mathbb{R}^\nu \mid x^2 = 0\}$ においては，$(\pm x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)}$ は関数 $\theta(\pm x^2)(\pm x^2)^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)}$ と同一視され，これに応じて，Δ_{F}, Δ_+ も関数であたえられることになる．

超関数 Δ を

$$\Delta(x) := \Delta_+(x) - \Delta_+(-x) \tag{9.83}$$

によって定義すれば，Δ_+ の Lorentz 不変性により，Δ も Lorentz 不変な超関数である．この超関数を **Pauli-Jordan 超関数**という．

(9.50), (9.56), (9.58) により，

$$[\phi^{\mathrm{free}}(f), \phi^{\mathrm{free}}(g)] = i\hbar \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} f(x)\Delta(x-y)g(y)dxdy, \quad f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), \tag{9.84}$$

と書ける (右辺の正確な意味は，$\Delta(f * g(-\cdot))$ である)．(9.81) から，

$$\Delta(x) = -\pi\varepsilon(x^0)(2\pi)^{-\nu/2} m^{\frac{\nu}{2}-1} (x^2)_+^{-\frac{1}{2}(\frac{\nu}{2}-1)} J_{1-\frac{\nu}{2}}(m(x^2)_+^{1/2}) \tag{9.85}$$

が得られる．

この表示から，特に，

$$\Delta(x) = 0, \quad x^2 < 0, \tag{9.86}$$

がわかる．つまり，超関数 Δ の台は，空間的領域の外にある：

$$\operatorname{supp} \Delta \subset \{x \in \mathbb{M}^\nu \mid x^2 \geq 0\}. \tag{9.87}$$

この事実と (9.84) により，次の結果が得られる．

命題 9-11 **(微視的因果律)** $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ とし，$\operatorname{supp} f$ と $\operatorname{supp} g$ が空間的に離れているならば，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上で，

$$[\phi^{\mathrm{free}}(f), \phi^{\mathrm{free}}(g)] = 0$$

が成り立つ．

これまでの議論をまとめると (9-2 節，(9.37)，命題 9-10, (9.48)，命題 9-11)，次の定理を得る．

定理 9-12 $U_{\mathrm{b}} : (a, \Lambda) \longrightarrow U_{\mathrm{b}}(a, \Lambda)$ $((a, \Lambda) \in \mathscr{P}^\uparrow_+)$ を (9.45) によって定義されるものとする．このとき，5 つ組 $\{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})), U_{\mathrm{b}}, \phi^{\mathrm{free}}, \mathscr{D}_{\mathrm{free}}, \Omega_0\}$ はスピン 0 の相対論的中性スカラー場の量子論である．

9-7 節　真空期待値

9-1 節の結果と 7-3-4 項の議論により ((7.8) を参照)，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^{\nu n}$ 上の緩増加超関数 $W_n^{\mathrm{freee}} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{\nu n})$ で，

$$W_n^{\mathrm{free}}(f_1 \times \cdots \times f_n) = \langle \Omega_0, \phi^{\mathrm{free}}(f_1) \cdots \phi^{\mathrm{free}}(f_n) \Omega_0 \rangle,$$
$$f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu),\ j = 1, \cdots, n, \tag{9.88}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．この超関数 W_n^{free} を自由な中性スカラー量子場の n 点 **Wightman 超関数**とよぶ．

(9.23a) と定理 4-51 によって，$f_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ が実数値または純虚数値のとき，

$$W_{2n-1}^{\mathrm{free}} = 0, \tag{9.89a}$$

$$W_{2n}^{\mathrm{free}}(f_1 \times \cdots \times f_{2n}) = (i\hbar)^n \sum_{\mathrm{comb}} \Delta_+(f_{i_1} \times f_{j_1}) \cdots \Delta_+(f_{i_n} \times f_{j_n}), \tag{9.89b}$$

が得られる．$W_n^{\mathrm{free}}(f_1\times\cdots\times f_n)$ の f_j に関する線形性により，(9.89) は任意の $f_j\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ $(j=1,\cdots,2n)$ へと拡張される（f_1 から始めて順にやっていけばよい）．超関数核を用いて書けば，

$$W_{2n-1}^{\mathrm{free}}(x_1,\cdots,x_{2n-1})=0,$$

$$W_{2n}^{\mathrm{free}}(x_1,\cdots,x_{2n})=(i\hbar)^n\sum_{\mathrm{comb}}\Delta_+(x_{i_1}-x_{j_1})\cdots\Delta_+(x_{i_n}-x_{j_n}),$$

である．特に，

$$W_2^{\mathrm{free}}(x,y)=i\hbar\Delta_+(x-y). \tag{9.90}$$

時間順序づけられた (time-ordered) 2 点真空期待値を，超関数の意味で，

$$G_2^{\mathrm{free}}(x,y):=\theta(x_0-y_0)W_2^{\mathrm{free}}(x,y)+\theta(y_0-x_0)W_2^{\mathrm{free}}(y,x),\quad x,\,y\in\mathbb{R}^\nu, \tag{9.91}$$

によって定義する．(9.90) と (9.72) によって，

$$G_2^{\mathrm{free}}(x,y)=i\hbar\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) \tag{9.92}$$

である．

9-8 節　運動量切断の入った，点様の場

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に属する実数値関数 ϱ で，

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varrho(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=1$$

をみたすものを 1 つ任意に固定する．定数 $\kappa>0$ と $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}$ を

$$\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}):=\kappa^d\varrho(\kappa(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})),\quad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d,$$

によって定義する．容易にわかるように，$\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$．付録 D の例 D-8 により，

$$\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}\xrightarrow{\mathscr{S}'}\delta_{\boldsymbol{x}},\quad \kappa\longrightarrow\infty$$

が成り立つ．つまり，$\{\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}\}_{\kappa>0}$ は点 $\boldsymbol{x}$ におけるデルタ超関数 $\delta_{\boldsymbol{x}}$ を近似する関数列である．任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\phi_\kappa^{\mathrm{free}}(t,\boldsymbol{x}):=\phi^{\mathrm{free}}(t,\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}) \tag{9.93}$$

を定義する．対応：$(t,\boldsymbol{x}) \longrightarrow \phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{R}^\nu$ 上の作用素値関数をあたえる．関数 $\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}$ のフーリエ変換は，変数変換 $\kappa(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \longrightarrow \boldsymbol{y}$ により，

$$\hat{\varrho}_{\kappa,\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{k}) = \check{\varrho}(\kappa^{-1}\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{9.94}$$

と計算される．したがって，

$$\mathfrak{p} := (\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_d) \tag{9.95}$$

($\mathfrak{p}_j$ は (8.29) で定義される関数) とおけば，

$$\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2}}\left\{a\left(\frac{\check{\varrho}(\kappa^{-1}\cdot)e^{-i\mathfrak{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\right)^* + a\left(\frac{\check{\varrho}(\kappa^{-1}\cdot)e^{-i\mathfrak{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\right)\right\} \tag{9.96}$$

と表される．$\check{\varrho}(\kappa^{-1}\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ であるから，$\check{\varrho}(\kappa^{-1}\cdot)/\sqrt{\omega} \in C^\infty(\mathfrak{p}_j) \cap C^\infty(\omega)$ $(j = 1, \cdots, d)$ である．ゆえに，補題 4-49 により，任意の $\Psi \in D(N_{\rm b}^{1/2})$ に対して，$\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\Psi$ は，t, $\boldsymbol{x}$ について，無限回強微分可能であり，特に，Klein-Gordon 方程式

$$(\Box + m^2)\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\Psi = 0 \tag{9.97}$$

をみたすことがわかる．そこで，作用素値関数 $\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ を**運動量切断 κ をもつ，点様の自由な量子 Klein-Gordon 場**という．

注意 9-4 κ を運動量切断とよぶのは，次の理由による．描像をはっきりさせるために，定数 $K > 0$ があって，$|\boldsymbol{k}| \le K$ ならば，$\check{\varrho}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d/2}$; $|k| \ge K+1$ ならば，$\check{\varrho}(\boldsymbol{k}) \approx 0$ という場合を考えよう．したがって，$|\boldsymbol{k}| \le K\kappa$ ならば $\check{\varrho}(\kappa^{-1}\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d/2}$ であり，この場合，(9.96) からわかるように，$\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換 (運動量表示) は，この集合上では，準双線形形式の意味で，$\phi^{\rm free}$ のフーリエ変換に等しい．一方，$|\boldsymbol{k}| > \kappa(K+1)$ の領域では，それらは等しくない．しかし，$\kappa \longrightarrow \infty$ とすれば，$K\kappa \longrightarrow \infty$ となるので，運動量空間全体で，$\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換は，準双線形形式の意味で，$\phi^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換に等しくなることが期待される．この意味で，$\phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ は，運動量空間の領域の切断 — これをパラメータ κ が司る — を通して，$\phi^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ の “近似” をあたえる作用素であると見ることができる．この描像に対する厳密な定式化は次の命題によってあたえられる．

命題 9-13 任意の $\Psi, \Phi \in \hat{D}_{\mathscr{S}}$ と $(t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，

$$\lim_{\kappa\to\infty}\langle\Psi, \phi_\kappa^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\Phi\rangle = \langle\Psi, \phi^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\Phi\rangle. \tag{9.98}$$

証明　$\Psi, \Phi \in \hat{D}_{\mathscr{S}}$ とすれば，(9.96) によって，

$$\langle \Psi, \phi_{\kappa}^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\Phi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\{\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t}\langle a(\boldsymbol{k})\Psi,\Phi\rangle\,d\boldsymbol{k}\right.$$
$$\left.+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)^*}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k})t}\langle \Psi, a(\boldsymbol{k})\Phi\rangle\,d\boldsymbol{k}\right\}. \tag{9.99}$$

一方，

$$|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)| \le C := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|\varrho(\boldsymbol{y})|\,d\boldsymbol{y} < \infty$$

であるから，

$$\left|\frac{\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\omega(\boldsymbol{k})t}\right| \le \frac{C}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}},\quad \left|\frac{\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)^*}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k})t}\right| \le \frac{C}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}.$$

また，

$$\lim_{\kappa\to\infty}\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varrho(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}.$$

さらに，$|\langle a(\boldsymbol{k})\Psi,\Phi\rangle|/\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}$ は可積分である．よって，ルベーグの優収束定理を応用することにより，(9.99) の右辺で，極限 $\kappa \longrightarrow \infty$ と積分 $\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k}$ が交換できることがわかるので，(9.98) が導かれる．　□

命題 9-13 は，運動量切断を除く極限 $\kappa \longrightarrow \infty$ をとると，$\hat{D}_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式の意味で，$\phi_{\kappa}^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ が $\phi^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})$ に収束することを示しており，上記の命名の妥当性に対する 1 つの根拠をあたえる．

切断の入った場の，同時刻での 2 点真空期待値

$$\langle \Omega_0, \phi_{\kappa}^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\phi_{\kappa}^{\rm free}(s,\boldsymbol{y})\Omega_0\rangle,\quad t,\, s\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d,$$

を考えよう．生成・消滅作用素がみたす CCR と $a(f)\Omega_0 = 0$ $(f\in L^2(\mathbb{R}^d))$ によって，任意の $t, s\in\mathbb{R}, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\langle \Omega_0, \phi_{\kappa}^{\rm free}(t,\boldsymbol{x})\phi_{\kappa}^{\rm free}(s,\boldsymbol{y})\Omega_0\rangle = \frac{\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2}{\omega(\boldsymbol{k})}e^{-i(t-s)\omega(\boldsymbol{k})}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,d\boldsymbol{k} \tag{9.100}$$

と計算される．

2 つの場合を考える．

(1) 任意の $R>0$ に対して，(9.100) から，

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\le R}\langle \Omega_0, \phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})\phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{0})\Omega_0\rangle\, d\boldsymbol{x} = \frac{\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2}{\omega(\boldsymbol{k})}\eta_R(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k}. \quad (9.101)$$

ただし，$\eta_R(\boldsymbol{k}) := \int_{|\boldsymbol{x}|\le R} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x}.$

まず，$m>0$ としよう．このとき，$|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2/\omega(\boldsymbol{k}) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ であり，付録 D の例 D-11 により，$\eta_R \xrightarrow{\mathscr{S}'} (2\pi)^d\delta_0$ であるから，(9.101) の右辺は，$R \longrightarrow \infty$ のとき，

$$(2\pi)^d\frac{\hbar}{2}\frac{|\check{\varrho}(\boldsymbol{0})|^2}{\omega(\boldsymbol{0})} = \frac{\hbar}{2m}$$

に収束する．したがって，

$$m = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|\le R}\langle \Omega_0, \phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})\phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{0})\Omega_0\rangle\, d\boldsymbol{x}}. \quad (9.102)$$

これは，質量 m を量子場の真空期待値を用いて表す式である．

(2) (9.100) から，

$$\langle \Omega_0, \phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})^2\Omega_0\rangle = \frac{\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k} \ge 0. \quad (9.103)$$

任意の $K>0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k} \ge \int_{|\boldsymbol{k}|\le K}\frac{|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}.$$

したがって，

$$\varliminf_{\kappa\to\infty}\langle \Omega_0, \phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})^2\Omega_0\rangle \ge \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\boldsymbol{k}|\le K}\frac{1}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}.$$

一方，

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\boldsymbol{k}|\le K}\frac{1}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k} = \infty \quad (9.104)$$

を見るのは難しくない (問題 2)．したがって，

$$\lim_{\kappa\to\infty}\langle \Omega_0, \phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})^2\Omega_0\rangle = \infty \quad (9.105)$$

が得られる．これは，運動量切断を除く極限において，同一時空点の 2 点真空期待値 $\langle \Omega_0, \phi_\kappa^{\text{free}}(t,\boldsymbol{x})^2\Omega_0\rangle$ が発散することを示すものであり，同一時空点での点様の量子場の特異性を示唆する．ここで現れた発散は，**紫外発散** (ultraviolet divergence) とよ

ばれる現象の簡単な場合である[13]．

9-9 節　荷電スカラー量子場

9-9-1　発見法的議論

(9.1) をみたす古典場 ϕ_{cl} が複素数値である場合に対応する量子場の構成の方法の概略を述べる．この場合の (9.1) の古典解の一般形は，$a_{\pm}^{\text{cl}}$ を (適当な条件をみたす) $\mathbb{R}^d$ 上の任意の関数として，

$$\phi_{\text{cl}}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k} \, \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d \omega(\boldsymbol{k})}} \left(a_{-}^{\text{cl}}(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a_{+}^{\text{cl}}(\boldsymbol{k}) e^{-i\omega(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right)$$

であたえられる ((0.34) を参照)．ここで，解 ϕ_{cl} の任意性に 2 つの自由度 — $a_{\pm}^{\text{cl}}$ — があることに注目しよう．古典場の量子化へと移行するには，これらを，CCR

$$[a_{\pm}(\boldsymbol{k}), a_{\pm}(\boldsymbol{k}')^*] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \quad [a_{\pm}(\boldsymbol{k}), a_{\pm}(\boldsymbol{k}')] = 0, \quad [a_{\pm}(\boldsymbol{k}), a_{\mp}(\boldsymbol{k}')^{\sharp}] = 0,$$

をみたす，作用素値超関数の核 $a_{\pm}(\boldsymbol{k})$ に置き換えればよい．すると，2 種類の生成 (消滅) 作用素 $a_{\pm}(\boldsymbol{k})^*$ ($a_{\pm}(\boldsymbol{k})$) が得られることになる．したがって，量子化された場は，2 種類の素粒子の生成・消滅を記述することになる．この 2 種類の素粒子は，結論から先に言えば，質量は同じであるが，電荷の符号が違う 2 つの素粒子と解釈されるものである[14]．ところで，荷電粒子には，これと電荷の符号が異なる反粒子が相伴って存在する[15]．これから，考察下の 2 つの素粒子は，荷電粒子の粒子と反粒子であると解釈される．こうして，自由な Klein-Gordon 方程式にしたがう複素場に対応する量子場は (スピン 0 の) 荷電粒子とその反粒子を記述することになる．

スピン 0 の荷電粒子の状態のヒルベルト空間を $\mathscr{H}_+$，その反粒子のそれを $\mathscr{H}_-$ としよう．粒子と反粒子は，場の量子論の観点からは，別々のものではなく，1 つの実体の 2 つの現れ方と見られる．この 1 つの実体とは，粒子と反粒子の対である．そこで，この対 1 つが有する可能な量子状態のヒルベルト空間として，粒子のヒルベルト空間と反粒子のヒルベルト空間との直和

---

[13] 運動量の大きさが大きい領域は，波数ベクトルの大きさが大きい領域であり，これは波長が短い領域 — 紫外領域 — に対応する．この描像により，運動量切断を除く極限で，物理量が発散する現象を紫外発散とよぶ．

[14] より詳しい物理的議論については，Bjorken and Drell (1965) の §12.5 を参照．

[15] 一般に A という素粒子に対して，A と同じ質量，同じスピン，同じ寿命をもち，電磁的性質については，大きさが同じで符号が逆であり，他の量子数についても符号が逆であるような素粒子を A の**反粒子** (anti-particle) という．すべての素粒子は，その反粒子をもつことが知られている (素粒子とその反粒子が一致する場合 — たとえば，中性中間子や光子 — も含める)．

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$$

をとる．このヒルベルト空間を，荷電粒子に付随する量子場が作用する状態のヒルベルト空間の 1 粒子状態の空間と解釈する．そして，中性スカラー粒子の場合との類推により，自由な荷電粒子の量子場は，$\mathscr{H}_1$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_1)$ 上で作用する，作用素値超関数として存在するであろう，と予想するのである．実際，この予想は正しい．

9-9-2 厳密な構成の概略

生成・消滅作用素と量子場

粒子，反粒子のヒルベルト空間 $\mathscr{H}_+$, $\mathscr{H}_-$ の選び方には，任意性があるが，ここでは，前節までに論じた中性スカラー量子場との並行性を考慮して，$\mathscr{H}_\pm = L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ と選ぶ．したがって，

$$\mathscr{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}) \oplus L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}).$$

$\mathscr{H}_1$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_1)$ における消滅作用素を $A(f, g)$ と書く ($(f, g) \in \mathscr{H}_1$)．このとき，粒子の消滅作用素 $a_+(f)$ と反粒子の消滅作用素 $a_-(f)$ を

$$a_+(f) := A(f, 0), \quad a_-(f) := A(0, f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}),$$

によって定義する．容易にわかるように，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}_1)$ 上で

$$[a_\pm(f), a_\pm(g)^*] = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad [a_\pm(f), a_\pm(g)] = 0,$$

$$[a_\pm(f), a_\mp(g)] = 0, \quad [a_\pm(f), a_\mp(g)^*] = 0, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}),$$

が成り立つ．前項の発見法的議論を考慮して，荷電粒子の量子場を

$$\phi_{\mathrm{cp}}(f) := \sqrt{\hbar\pi}\left\{a_-\left(\frac{Ff}{\sqrt{\omega}}\right)^* + a_+\left(\frac{Ff^*}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}$$

によって定義する[16]．これが，超関数の意味での自由な KG 方程式

$$\phi_{\mathrm{cp}}((\Box + m^2)f) = 0$$

をみたすことは，中性スカラー量子場 ϕ^{free} の場合と同様にして示される．

交換関係については，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}_1)$ 上で，

$$[\phi_{\mathrm{cp}}(f), \phi_{\mathrm{cp}}(g)^*] = i\hbar \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\Delta(x-y)g(y)^* dxdy,$$

---

[16] "cp" は "charged particle" (荷電粒子) の略.

$$[\phi_{\rm cp}(f), \phi_{\rm cp}(g)] = 0, \quad [\phi_{\rm cp}(f)^*, \phi_{\rm cp}(g)^*] = 0,$$

が成り立つ.

ハミルトニアンと運動量作用素

ハミルトニアンは，$E_{\rm R}$ を (9.9) によって定義される関数として，

$$H_{\rm cp} := d\Gamma_{\rm b}(E_{\rm R} \oplus E_{\rm R}),$$

すなわち，$\mathscr{H}_1$ の自己共役作用素 $E_{\rm R} \oplus E_{\rm R}$ の第 2 量子化によって定義される[17)]．運動量作用素は，(8.29) の関数 $\mathfrak{p}_j$ を用いて，

$$P_j^{\rm cp} := d\Gamma_{\rm b}(\mathfrak{p}_j \oplus \mathfrak{p}_j), \quad j = 1, \cdots, d,$$

によって定義される.

全電荷作用素

荷電粒子の場の量子論においては，新しい対象として，電荷作用素なるものが登場する．荷電粒子の電荷を $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ としよう．このとき，作用素 $qI \oplus (-qI)$ を考えると，

$$qI \oplus (-qI)(f, 0) = q(f, 0), \quad qI \oplus (-qI)(0, g) = -q(0, g), \quad f \in \mathscr{H}_+, g \in \mathscr{H}_-,$$

すなわち，$\mathscr{H}_+$ は，$qI \oplus (-qI)$ の固有値 $+q$ (粒子の電荷) に属する固有空間であり，$\mathscr{H}_-$ は，$qI \oplus (-qI)$ の固有値 $-q$ (反粒子の電荷) に属する固有空間である．そこで，$qI \oplus (-qI)$ を **1 粒子空間 $\mathscr{H}_1$ 上の電荷作用素**とよぶ.

この作用素の第 2 量子化

$$Q := d\Gamma_{\rm b}(qI \oplus (-qI)) = q\, d\Gamma_{\rm b}(I \oplus (-I))$$

によって定義される，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_1)$ 上の自己共役作用素を**全電荷作用素** (charge operator) とよぶ．実際，粒子が n_+ 個，反粒子が n_- 個ある状態として，

$$\Psi_{n_+, n_-} := a_+(f_1)^* \cdots a_+(f_{n_+})^* a_-(g_1)^* \cdots a_-(g_{n_-})^* \Omega_{\mathscr{H}_1}$$

($f_j \in \mathscr{H}_+$, $g_i \in \mathscr{H}_-$) を考えると，定理 4-27 の応用からしたがう交換関係

$$[Q, a_+(f)^*] = qa_+(f)^*, \quad [Q, a_-(f)^*] = -qa_-(f)^*, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}),$$

($\mathscr{F}_{\rm b,0}(\mathscr{H}_1)$ 上で成立) と $Q\Omega_{\mathscr{H}_1} = 0$ を用いて，

---

17) $E_{\rm R} \oplus E_{\rm R}(f, g) := (E_{\rm R} f, E_{\rm R} g), \quad (f, g) \in D(E_{\rm R}) \oplus D(E_{\rm R})$.

$$Q\Psi_{n_+,n_-} = (n_+ - n_-)q\Psi_{n_+,n_-}$$

となることがわかる．数 $(n_+ - n_-)q$ は状態 Ψ_{n_+,n_-} における全電荷であるから，Q は確かに全電荷を固有値とする自己共役作用素である．

Poincaré 群のユニタリ表現

すでに構成した，固有 Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^\uparrow$ のユニタリ表現 $\{u(a,\Lambda) \,|\, (a,\Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow\}$ ((9.43) 式) から，

$$U_{\mathrm{cp}}(a,\Lambda) := \Gamma(u(a,\Lambda) \oplus u(a,\Lambda))$$

をつくると，これはボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_1)$ 上での，$\mathscr{P}_+^\uparrow$ のユニタリ表現をあたえる．これに関して，次が成立する：

(i)　すべての $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow$ に対して，

$$U_{\mathrm{cp}}(a,\Lambda)\Omega_{\mathscr{H}_1} = \Omega_{\mathscr{H}_1}.$$

(ii)　すべての $U_{\mathrm{cp}}((t,\mathbf{0}),I)$ $(t \in \mathbb{R})$ で不変となるベクトルは $\Omega_{\mathscr{H}_1}$ の定数倍に限られる．

(iii)　任意の $a = (a_0, \boldsymbol{a}) \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，

$$U_{\mathrm{cp}}(a,I) = e^{ia_0 H_{\mathrm{cp}}/\hbar} e^{-ia_1 P_1^{\mathrm{cp}}/\hbar} \cdots e^{-ia_d P_d^{\mathrm{cp}}/\hbar}.$$

(iv)　$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H}_1)$ 上で，

$$U_{\mathrm{cp}}(a,\Lambda)\phi_{\mathrm{cp}}(f)U_{\mathrm{cp}}(a,\Lambda)^{-1} = \phi_{\mathrm{cp}}(f_{(a,\Lambda)}), \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_{\boldsymbol{x}}).$$

真空期待値

任意の $f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}_1}, \phi_{\mathrm{cp}}(f)\phi_{\mathrm{cp}}(g)^*\Omega_{\mathscr{H}_1}\rangle = i\hbar \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\Delta_+(x-y)g(y)^*\, dxdy,$$

$$\langle \Omega_{\mathscr{H}_1}, \phi_{\mathrm{cp}}(f)^*\phi_{\mathrm{cp}}(g)\Omega_{\mathscr{H}_1}\rangle = i\hbar \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)^*\Delta_+(x-y)g(y)\, dxdy.$$

さらに，任意の $n \in \mathbb{N}$, $f_j,\, g_i \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ に対して，

$$\left\langle \Omega_{\mathscr{H}_1}, \prod_{j=1}^n \phi_{\mathrm{cp}}(f_j)\Omega_{\mathscr{H}_1}\right\rangle = 0, \quad \left\langle \Omega_{\mathscr{H}_1}, \prod_{j=1}^n \phi_{\mathrm{cp}}(g_i)^*\Omega_{\mathscr{H}_1}\right\rangle = 0.$$

$\left\langle \Omega_{\mathscr{H}_1}, \prod_{j=1}^{n} \phi_{\rm cp}(f_j) \prod_{i=1}^{l} \phi_{\rm cp}(g_i)^* \Omega_{\mathscr{H}_1} \right\rangle$ という形の真空期待値は 2 点真空期待値 $\langle \Omega_{\mathscr{H}_1}, \phi_{\rm cp}(f_j)\phi_{\rm cp}(g_i)^* \Omega_{\mathscr{H}_1} \rangle$ を用いて書かれるが，それを書き下すことはここでは省略する．

9-9-3　テンソル積を用いる方法

4-7 節の結果を応用すると，

$$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H}_1) \cong \mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})) \otimes \mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$$

と同一視できる．この同一視において，上述した作用素たちは次のように対応する：

$$a_+(f) \longleftrightarrow a(f) \otimes I, \quad a_-(f) \longleftrightarrow I \otimes a(f),$$

$$H_{\rm cp} \longleftrightarrow H_0 \otimes I + I \otimes H_0, \quad P_j^{\rm cp} \longleftrightarrow \overline{\hat{P}_j \otimes I + I \otimes \hat{P}_j},$$

$$Q \longleftrightarrow \overline{qN_{\rm b} \otimes I - qI \otimes N_{\rm b}},$$

$$U_{\rm cp}(a, \Lambda) \longleftrightarrow U_{\rm b}(a, \Lambda) \otimes I + I \otimes U_{\rm b}(a, \Lambda).$$

ノート

定理 9-12 で確立したように，この章で構成した自由な量子 Klein-Gordon 場の理論は相対論的場の量子論の 1 つのモデルである．したがって，7 章の一般論によって，自由な量子 Klein-Gordon 場の理論は対応するユークリッド場の理論をもつ．このユークリッド場の理論を特徴づける Schwinger 関数がどのようなものであるかを調べるのはそれほど難しくない (江沢-新井 (1988) の §4.5，問題 5, 6 も参照)．

自由な量子 Klein-Gordon 場に伴うユークリッド場の理論はガウス型確率超過程を用いて記述される．この理論を使うと相互作用をもつハミルトニアンによって生成される熱半群に対して，汎関数 (経路) 積分表示が可能となる．この種の表示はハミルトニアンや場の真空期待値を解析する上で極めて強力な方法を提供する．詳細については，たとえば，江沢-新井 (1988) の §4.5，9 章，Glimm and Jaffe (1987), Simon (1979) を参照．

9-8 節で導入した運動量切断の入った点様の場は，相互作用を有すると予想される量子場のモデルを構成するに際して，そのハミルトニアンの相互作用部分を厳密に定義するために使われる．たとえば，$P(\phi)_\nu$ モデル (序章を参照) においては，相互作用部分は，形式的に $H_I = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} : P(\phi(0, \boldsymbol{x})) : d\boldsymbol{x}$ ($\lambda \neq 0$ は実定数) という形であたえられる (自明な発散を除くために Wick 積 $:\cdot:$ をとる)．そこで，$g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を実数値関数として，$H_{I,\kappa}(g) := \lambda \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{x}) : P(\phi_\kappa^{\rm free}(0, \boldsymbol{x})) : d\boldsymbol{x}$ を H_I の "近似的" な対応物と予想し，近似的なハミルトニアンを $H_\kappa(g) :=$

$H_0 + H_{I,\kappa}(g)$ によって定義する．このとき，$H_\kappa(g)$ の $\kappa \longrightarrow \infty$, $g(\boldsymbol{x}) \longrightarrow 1$ における極限がいかなる意味で存在するか，あるいは存在しないかを考察するのである (江沢-新井 (1988) の 9 章を参照).

なお，運動量切断 $\kappa > 0$ をもつ量子場として，$\phi_\kappa^{\mathrm{free}}$ と少しだけ異る作用素

$$\phi_\kappa(t,\boldsymbol{x}) := \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d}}\left\{a\left(\frac{\chi_\kappa e^{-i\mathrm{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\right)^* + a\left(\frac{\chi_\kappa e^{-i\mathrm{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\omega t}}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}$$

を採用することもできる．ただし，χ_κ は集合 $\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \,|\, |\boldsymbol{k}| \le \kappa\}$ の定義関数である．これを**鋭運動量切断 (sharp momentum cutoff) をもつ，点様の自由な量子 Klein-Gordon 場**と呼ぶ．この場も $\phi_\kappa^{\mathrm{free}}$ と同様の性質をもつ．運動量切断をもつ相互作用場のモデルを構築する際に，$\phi_\kappa(t,\boldsymbol{x})$ を用いる方が簡単になる場合がある．

9 章演習問題

♮**1.** (9.5) を証明せよ．

ヒント　任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}))$ と $n \ge 0$ に対して

$$(\Gamma(\mathscr{F}_d)\Psi)^{(n)}(\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n) = \frac{1}{(2\pi)^{dn/2}}\int_{\mathbb{R}^{dn}} \Psi^{(n)}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)e^{-i\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{x}_n}\,d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n$$

であることを示し，これを用いよ．

♮**2.** (9.104) を証明せよ．

3. 各 t に対して，$\Delta_+(t,\cdot)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数と考えるとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_+(t,\boldsymbol{x})\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{2}\delta^d(\boldsymbol{x})$$

を示せ．

ヒント　(9.55) 式．

4. 各 t に対して，$\Delta(t,\cdot)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数と考えるとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(t,\boldsymbol{x})\bigg|_{t=0} = -\delta^d(\boldsymbol{x})$$

を示せ．

ヒント　前問と (9.83) 式．

5. 各 $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して，$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の関数 $W_2(\cdot,u)$ を次のように定義する：

$$W_2(z,u) := \begin{cases} \dfrac{\hbar}{2(2\pi)^{d/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{-i\omega(\boldsymbol{k})z}\check{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k} & (\mathrm{Im}\,z < 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\hbar}{2(2\pi)^{d/2}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{i\omega(\boldsymbol{k})z}\check{u}(\boldsymbol{k})}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k} & (\mathrm{Im}\,z > 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(i)　$W_2(z,u)$ は z について $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則関数であることを示せ．

(ii)　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} W_2(t - i\varepsilon, u) = W_2^{\mathrm{free}}(t, u)$$

を示せ．ただし，$W_2^{\mathrm{free}}(t,u) := \int_{\mathbb{R}^d} W_2^{\mathrm{free}}(t,\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ ($W_2^{\mathrm{free}}(t,\boldsymbol{x})$ を空間変数 $\boldsymbol{x}$ について均して定義される緩増加超関数)．

(iii)

$$\mathbb{R}^\nu_{\neq} := \{x = (x_0, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^\nu \mid x_0 \neq 0\}$$

とおく．任意の $x_0 \in \mathbb{R}^\nu_{\neq}$ に対して，

$$W_2(ix_0, u) = \int_{\mathbb{R}^d} S(x)u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

と表されることを示せ．ただし，

$$S(x) := \frac{\hbar}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\omega(\boldsymbol{k})|x_0| + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\omega(\boldsymbol{k})}\,d\boldsymbol{k}, \quad x \in \mathbb{R}^\nu_{\neq}.$$

ヒント　フビニの定理を応用せよ．

(iv)　$\mathbb{R}^\nu_{\neq}$ 上の関数 $S(x)$ は無限回微分可能であることを示せ．さらに，任意の $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，$|\boldsymbol{x}| + |x_0 - t| < |t|$ ならば

$$S(x) = \sum_{n,l=0}^{\infty} \sum_{l_1+\cdots+l_d=l} C_{n,l_1,\cdots,l_d}(x_0 - t)^n x_1^{l_1} \cdots x_d^{l_d}$$

とテイラー展開できることを示せ (右辺は絶対収束)．ただし，

$$C_{n,l_1,\cdots,l_d} = \frac{\hbar}{2(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (-\varepsilon(t))^n i^l \omega(\boldsymbol{k})^{n-1} e^{-\omega(\boldsymbol{k})|t|} \frac{l!}{l_1! \cdots l_d!} k_1^{l_1} \cdots k_d^{l_d}\,d\boldsymbol{k}.$$

ヒント　$t > 0$ と $t < 0$ の場合に分けて考えよ．$t > 0$ かつ $|x_0 - t| < |t|$ ならば，$x_0 > 0$ であり，$|x_0| = x_0 = (x_0 - t) + t = (x_0 - t) + |t|$，したがって，$e^{-\omega(\boldsymbol{k})|x_0|} = e^{-\omega(\boldsymbol{k})(x_0 - t)} e^{-\omega(\boldsymbol{k})|t|} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \omega(\boldsymbol{k})^n e^{-\omega(\boldsymbol{k})|t|}(x_0 - t)^n / n!$ に注意．$t < 0$ の場合も同様の変形をする．

(v)　任意の $x \in \mathbb{R}^\nu_{\neq}$ に対して，

$$S(x) := \frac{\hbar}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}\,dk_0$$

を示せ．ここで，$kx = k_0 x_0 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$, $k^2 = k_0^2 + \boldsymbol{k}^2$ (ユークリッド内積)．

ヒント　任意の正数 $a > 0$ と $t \in \mathbb{R}$ $(t \neq 0)$ に対して，留数定理を使って証明される公式

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ik_0 t}}{k_0^2 + a^2}\,dk_0 = \frac{\pi}{a} e^{-a|t|}$$

を用いて変形せよ．

(vi) $\mathbb{R}^\nu_{\neq}$ 上の関数 S はユークリッド回転不変であること，すなわち，任意の $R \in \mathrm{SO}(\nu)$ に対して，$S(R^{-1}x) = S(x)$ $(x,\ R^{-1}x \in \mathbb{R}^\nu_{\neq})$ を示せ．

注意 $S(x-y)$ は自由な量子スカラー場の 2 点 Wightman 超関数 $W_2^{\mathrm{free}}(x,y)$ の虚数時間領域への解析接続をあたえるものであり，自由場の 2 点 Schwinger 関数である．ついでに言えば，自由場の n 点 Schwinger 関数 S_n^{free} は，次のようにあたえられる[18]：任意の $n \geq 1$ に対して，

$$S_{2n-1}^{\mathrm{free}}(x_1, \cdots, x_{2n-1}) = 0,$$

$$S_{2n}^{\mathrm{free}}(x_1, \cdots, x_{2n}) = \sum_{\mathrm{comb}} S(x_{i_1} - x_{j_1}) \cdots S(x_{i_n} - x_{j_n}).$$

$\mathbb{R}^\nu$ 上の緩増加超関数としての S は関数 $\hbar(k^2+m^2)^{-1}$ の超関数の意味での逆フーリエ変換であることがわかる．この事実を通常，象徴的に

$$S(x) := \frac{\hbar}{(2\pi)^\nu} \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{e^{ikx}}{k^2+m^2}\, dk$$

と記す．

6. $\mathbb{R}^\nu$ 上の関数 $\omega^{(\nu)}$ を

$$\omega^{(\nu)}(k) = \sqrt{k^2+m^2}, \quad k \in \mathbb{R}^\nu,$$

によって定義する．$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^\nu_x)$ の元 f で $\hat{f}/\omega^{(\nu)} \in L^2(\mathbb{R}^\nu_x)$ をみたすものの全体を $\mathscr{H}_{-1}(\mathbb{R}^\nu_x)$ とする．$f, g \in \mathscr{H}_{-1}(\mathbb{R}^\nu_x)$ に対して，$S(f,g)$ を

$$S(f,g) := \hbar \int_{\mathbb{R}^\nu} \frac{\check{f}(k)\hat{g}(k)}{k^2+m^2}\, dk$$

によって定義する．

(i) $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu_x)$ ならば，$f, g \in \mathscr{H}_{-1}(\mathbb{R}^\nu_x)$ であり，

$$S(f,g) = \int_{\mathbb{R}^\nu} S(x-y) f(x) g(y)\, dx dy$$

であることを示せ．ここで，S は前問の関数である．ただし，$m=0$ のときは $\nu \geq 3$ とする．

(ii) $L^2(\mathbb{R}^\nu_k)$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^\nu_k))$ における消滅作用素を $a_{\mathrm{E}}(\cdot)$ とし，$f \in \mathscr{H}_{-1}(\mathbb{R}^\nu_x)$ に対して，

$$\Phi_{\mathrm{E}}(f) := \sqrt{\hbar}\left\{ a_{\mathrm{E}}\left(\frac{\hat{f}}{\omega^{(\nu)}}\right)^* + a_{\mathrm{E}}\left(\frac{\hat{f}^*}{\omega^{(\nu)}}\right)\right\}$$

[18] 江沢-新井 (1988) の §4.5 を参照．

を定義する[19]．このとき，

$$\langle \Omega_{L^2(\mathbb{R}_k^\nu)}, \Phi_{\mathrm{E}}(f)\Phi_{\mathrm{E}}(g)\Omega_{L^2(\mathbb{R}_k^\nu)}\rangle = S(f,g)$$

を示せ．

(iii)　$\{\Phi_{\mathrm{E}}(f) \mid f \in \mathscr{H}_{-1}(\mathbb{R}_x^\nu)\}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_k^\nu))$ 上で可換な作用素の族であることを示せ．

注意　前問の注意と問 (ii), (iii) からわかるように，作用素 $\Phi_{\mathrm{E}}(f)$ は**自由なユークリッド的量子場**の作用素版と解釈される．

7. 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d)$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d))$ 上で

$$a(f)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\phi^{\mathrm{free}}(t, h_m^{1/4}e^{-ih_m^{1/2}t}\check{f}) - i\pi^{\mathrm{free}}(t, h_m^{-1/4}e^{-ih_m^{1/2}t}\check{f})\right\}$$

が成り立つことを示せ．右辺は $t \in \mathbb{R}$ に依らない．ここで，h_m は命題 9-1 の証明で使われた，$L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^d)$ の作用素である：$h_m = -\Delta + m^2$．

ヒント　(9.25a), (9.25b) を使え．

---

[19] 添字「E」は「Euclidean」(ユークリッド的) の意．いまの物理的文脈では，$\mathbb{R}^\nu$ をユークリッド的時空と見る．

第 10 章

電磁場の量子論

電気と磁気に関わる現象，すなわち，電磁現象を量子力学的に記述するための基礎となる量子電磁場の理論を論じる．

10-1 節　電磁場の古典論

10-1-1　Maxwell 方程式とゲージ不変性

巨視的なレヴェルの電磁現象は，Maxwell (マクスウェル) によって打ち立てられた電磁気学によって解明される．この理論の根幹をなす対象は，4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^4$ 上の $\mathbb{R}^3$-値関数である電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ と磁場 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ の組 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ である．これらは，次の**マクスウェルの方程式** (M.1), (M.2) にしたがう (電磁気学の公理)：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{M.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{c^2 \varepsilon_0} + \frac{1}{c^2}\partial_t \boldsymbol{E}. \tag{M.2}$$

ここで，$\nabla := (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ は 3 次元の勾配 (gradient)，$\operatorname{div} \boldsymbol{u} := \sum_{j=1}^{3} \partial_j u_j$ (ベクトル場 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の発散)，

$$\nabla \times \boldsymbol{u} := (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

(ベクトル場 $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の回転)，$\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, j_3) : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ は電流密度を表すベクトル場，$\varrho : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ は電荷密度を表すスカラー関数，c は真空中の光速，ε_0 は

真空の誘電率とよばれる物理定数である．単位系は有理化された MKSA 単位系を用いている．

以後，$c = 1$ の単位系にうつる．

ベクトル解析の基本的事実を用いると，(M.1) から，

$$\boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{A} - \nabla\phi, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{10.1}$$

をみたす，ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3) : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ とスカラー関数 $\phi : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ の存在が導かれる．これらの組

$$A(t, \boldsymbol{x}) := (\phi(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})), \quad (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{M}^4, \tag{10.2}$$

は**電磁ポテンシャル**あるいは**ゲージポテンシャル**とよばれる[1]．各成分については，ϕ を**スカラーポテンシャル**，$\boldsymbol{A}$ を**ベクトルポテンシャル**という．

(M.2) から，電磁ポテンシャルは方程式

$$\Box \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) + \nabla(\partial_t \phi(t, \boldsymbol{x}) + \operatorname{div} \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})) = \frac{\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}, \tag{10.3}$$

$$-\operatorname{div}(\partial_t \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x}) + \nabla\phi(t, \boldsymbol{x})) = \frac{\varrho(t, \boldsymbol{x})}{\varepsilon_0} \tag{10.4}$$

をみたすことがわかる．ここで，

$$\Box := \partial_t^2 - \Delta \quad (4\text{ 次元のダラーンベルシャン}),$$

$$\Delta := \operatorname{div} \nabla = \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 \quad (3\text{ 次元ラプラシアン}).$$

逆に，(10.3), (10.4) をみたすベクトル場 $A = (\phi, \boldsymbol{A}) : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ に対して，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ を (10.1) によって定義すれば，これらは，マクスウェル方程式 (M.1), (M.2) をみたすことがわかる．

こうして，マクスウェルの電磁気学は，(10.3)，(10.4) をみたす電磁ポテンシャル A を用いて記述される理論に包含される．

注意 10-1　方程式 (10.3), (10.4) の Lorentz 共変性について，若干述べておく．

$$\tilde{A}_0 := \phi, \quad \tilde{A}_l := -A_l,$$

$$\tilde{j}_0 := \varrho, \quad \tilde{j}_l := -j_l, \quad l = 1, 2, 3,$$

---

[1] ゲージ (gauge) とは「尺度」の意である．この命名は後述のゲージ変換と関わる．

とおき，

$$\tilde{A} := (\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3), \quad \tilde{j} := (\tilde{j}_0, \tilde{j}_1, \tilde{j}_2, \tilde{j}_3),$$

を導入する．このとき，(10.3), (10.4) は

$$\Box \tilde{A}_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu \tilde{A}^\nu) = \frac{\tilde{j}_\mu}{\varepsilon_0}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{10.5}$$

という形に書き直せる[2)]．これから，$\tilde{A}$ と $\tilde{j}$ を Lorentz 変換に関する共変ベクトル場と考えることにより，場の方程式 (10.3), (10.4) は Lorentz 共変であることが次のようにしてわかる．まず，ダランベールシャン $\Box$ は Lorentz 不変である．すなわち，$x' = \Lambda x$ ($x \in \mathbb{M}^4$, $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$) とすれば，$\partial_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu$ であるので (∂'_ν は変数 x'_ν に関する変微分)，$\Box' = \Box$ が成り立つ ($\Box'$ は変数 x' に関するダランベールシャン)．新しい座標系 x' での場は $\tilde{A}'(x') := \Lambda \tilde{A}(x)$ によって定義される (これは，場 $\tilde{A}$ が共変ベクトル場であるということ)．これらを用いると，

$$\Box' \tilde{A}'_\mu(x') - \partial_\mu{}'(\partial_\nu{}' \tilde{A}'^\nu(x')) = \frac{\tilde{j}'_\mu(x')}{\varepsilon_0}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

が導かれる．ただし，$\tilde{j}'(x') := \Lambda \tilde{j}(x)$．よって，場の方程式 (10.5)，したがって，(10.3), (10.4) は Lorentz 不変である．

電磁場の量子化は，de Broglie 場やスカラー場の場合に比して，若干やっかいな問題を含む．というのは，電磁場は，6 個の対象 E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3 からなり，これらは独立ではなく，マクスウェル方程式を通してたがいに関連しあっているからである．これは，電流と電荷が存在しない場合 ($\boldsymbol{j} = 0, \varrho = 0$) でもそうである．そこで，量子化されるべき独立な対象を選ぶために，電磁場よりもむしろ電磁ポテンシャル A に対して量子化を遂行することを考える．もしこれができれば，(10.1) により，電場と磁場も自動的に量子化されることになる．もちろん，電磁ポテンシャルにうつっても，方程式 (10.3), (10.4) からわかるように，電磁ポテンシャルの各成分は独立ではない．しかし，理論に含まれる或る不変性を利用することにより，電磁ポテンシャルの成分間の依存性を簡単な形に表すことができる．この不変性とは，電磁場 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ をあたえる電磁ポテンシャル A が一意的に決まらないという事実に付随する不変性である．実際，$\mathbb{M}^4$ 上の微分可能な任意の関数 Λ に対して，

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \Lambda, \quad \phi' = \phi - \partial_t \Lambda \tag{10.6}$$

[2)] ギリシャ文字の上げ下げや和の規約については，7 章，7-4 節，7-4-1 項を参照．

とおけば，

$$A' := (\phi', \boldsymbol{A}')$$

も A と同一の電磁場をあたえること，および A' は A と同一の方程式 (10.3), (10.4) をみたすことが，直接計算により，容易に確かめられる．(10.5) で定義される，電磁ポテンシャルの変換

$$G_\Lambda : A \longrightarrow A', \quad A' := G_\Lambda(A), \tag{10.7}$$

を**ゲージ変換**という．この変換をあたえる関数 Λ は**ゲージ関数**あるいは単に**ゲージ**とよばれる．電磁ポテンシャルを用いる電磁気学は，ゲージ変換に対する不変性 — **ゲージ不変性** — を有するのである．

ゲージ不変性に基づいて，適当にゲージ変換を行うことにより，場の方程式 (10.3), (10.4) をより簡潔な形にもたらすことができる．この処方を，物理の文献では,「ゲージを選ぶ」とか「ゲージを取る」と言い表す．たとえば，$\operatorname{div} \boldsymbol{A}' = 0$ となるようなゲージ関数 Λ_0 を求めてみよう．この条件は，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \Delta\Lambda_0 = 0 \tag{10.8}$$

と同等である．

ところで，一般に，f を，$\mathbb{R}^3$ 上のあたえられた連続関数で $\displaystyle\int_{|\boldsymbol{x}|\geq 1} d\boldsymbol{x}\, \frac{|f(\boldsymbol{x})|}{|\boldsymbol{x}|} < \infty$ をみたすものとするとき，**Poisson の方程式**

$$\Delta u = f$$

の解 u で，無限遠での境界条件として，

$$u(\boldsymbol{x}) \sim \frac{C_1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\nabla u(\boldsymbol{x})| \sim \frac{C_2}{|\boldsymbol{x}|^2}, \quad |\boldsymbol{x}| \longrightarrow \infty$$

(C_1, C_2 は定数) をみたすものは，

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y}$$

であたえられる[3]．

$\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ が f と同じ条件をみたすとして，

$$\Lambda_0(t, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{A}(t, y)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y}$$

[3] たとえば，マージナウ-マーフィ(1973) の 7 章，§7.17，(7-64) を参照．

と定義すれば，前段の事実の応用により，(10.8) が成立する．したがって，$\operatorname{div} \boldsymbol{A}' = 0$ となる．このゲージの取り方を **Coulomb (クーロン) ゲージ**という．

そこで，この $A' = G_{\Lambda_0}(A)$ をあらためて A と書くことにすれば，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0, \tag{10.9}$$

$$\Box \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) + \partial_t \nabla \phi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}, \tag{10.10}$$

$$-\Delta\phi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\varrho(t,\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0} \tag{10.11}$$

という方程式の組が得られる．(10.11) は，ϕ が Poisson の方程式をみたすことを示している．したがって，ϕ, ϱ に対する適当な条件のもとで，

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(t,\boldsymbol{y})}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y} \tag{10.12}$$

がしたがう．すなわち，スカラーポテンシャル ϕ は，電荷密度から求められる．

10-1-2　自由な電磁場

もっとも簡単な場合として，時空上に電荷や電流が存在しない場合：

$$\boldsymbol{j} = 0, \quad \varrho = 0 \tag{10.13}$$

を考えよう．この場合の電磁場を**自由な電磁場**とよぶ．このとき，Coulomb ゲージにおける電磁ポテンシャルは，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0, \tag{10.14}$$

$$\phi = 0, \tag{10.15}$$

$$\Box \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{10.16}$$

をみたす．Klein-Gordon 場の場合と同様にして，(10.16) の一般解は

$$A_j(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^3|\boldsymbol{k}|}} \left(a_j(\boldsymbol{k})^* e^{i|\boldsymbol{k}|t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a_j(\boldsymbol{k}) e^{-i|\boldsymbol{k}|t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right),$$

$$j = 1,2,3,$$

であたえられる．ただし，$a_j(\boldsymbol{k})$ は必要な可積分性をもつ任意の関数とする[4]．(10.14)

---

[4] 定数パラメータ $\hbar$ は，後に述べる量子化との対応を先取りして入れてある．古典論では，$\sqrt{\hbar}a_j$ をあらためて a_j とすれば，$\hbar$ を消すことができる．

を $\boldsymbol{x}$ に関してフーリエ変換すると，

$$\sum_{j=1}^{3} k_j \hat{A}_j(t,\boldsymbol{k}) = 0.$$

ただし，

$$\begin{aligned}\hat{A}_j(t,\boldsymbol{k}) &:= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} A_j(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}}\Big(a_j(-\boldsymbol{k})^* e^{i|\boldsymbol{k}|t} + a_j(\boldsymbol{k})e^{-i|\boldsymbol{k}|t}\Big).\end{aligned}$$

したがって，

$$\left(\sum_{j=1}^{3} k_j a_j(-\boldsymbol{k})^*\right)e^{i|\boldsymbol{k}|t} + \left(\sum_{j=1}^{3} k_j a_j(\boldsymbol{k})\right)e^{-i|\boldsymbol{k}|t} = 0$$

でなければならないことがわかる．特に，$t=0$ とすれば，

$$\sum_{j=1}^{3} k_j a_j(-\boldsymbol{k})^* + \sum_{j=1}^{3} k_j a_j(\boldsymbol{k}) = 0.$$

(10.14) は，$\operatorname{div}\partial_t \boldsymbol{A} = 0$ も意味するから，同様にして，

$$\sum_{j=1}^{3} k_j a_j(-\boldsymbol{k})^* - \sum_{j=1}^{3} k_j a_j(\boldsymbol{k}) = 0$$

が得られる．これらの 2 つの式から，

$$\sum_{j=1}^{3} k_j a_j(\boldsymbol{k}) = 0$$

が導かれる．したがって，各 $\boldsymbol{k}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) := (a_1(\boldsymbol{k}), a_2(\boldsymbol{k}), a_3(\boldsymbol{k}))$ は $\boldsymbol{k}$ と直交する．

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ $(\boldsymbol{k} \neq 0)$ に対して，単位ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})$ で $\{\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|, \boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底になるようなものがとれる：

$$\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k}) = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) = 0, \quad r = 1, 2. \tag{10.17}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$ と $\boldsymbol{k}$ の直交性は，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})$ が $\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})$ で生成される部分空間にあることを意味する．したがって，

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}) = a^{(1)}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}) + a^{(2)}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})$$

と表される．ただし，$a^{(r)}(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$．こうして，(10.14), (10.16) の解 $\boldsymbol{A}$ が次の形で得られる：

$$A_j(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{2} \int_{\mathbf{R}^3} d\boldsymbol{k}\, \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^3|\boldsymbol{k}|}} e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})$$
$$\times \left(a^{(r)}(\boldsymbol{k})^* e^{i|\boldsymbol{k}|t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^{(r)}(\boldsymbol{k}) e^{-i|\boldsymbol{k}|t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right), \quad j = 1,2,3. \tag{10.18}$$

注意 10-2　ベクトル $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ は，物理的には，電磁波の偏りを表すベクトルである．各 $\boldsymbol{k}$ と $r = 1,2$ に対して，$\mathbb{C}^3$-値関数 $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k},r}^{(\pm)}(t,\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) e^{\pm i|\boldsymbol{k}|t \mp i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ は，(10.14), (10.16) の解である．これを**平面波解**という．この解は，物理的には，波数ベクトルが $\boldsymbol{k}$，偏りが $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ で表される**平面電磁波**を表す．これは，振動変位の方向 ($\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ の方向) が進行方向 ($\boldsymbol{k}$ の方向) と垂直なので，横波である．したがって，Coulomb ゲージにおける自由な電磁場のベクトルポテンシャル (10.18) は横波の平面電磁波の重ね合わせになっている．

注意 10-3　Coulomb ゲージの場合の場の方程式 (10.9)~(10.11) においては，場の Lorentz 共変性がはっきりとは見えにくい．この点を改善するには，別のゲージを取るとよい．たとえば，電磁ポテンシャルが **Lorentz 条件**

$$\partial_t \phi + \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$$

をみたすようにゲージを選ぶことが可能である (問題 1)．この条件は，注意 10-1 の記号を使えば，

$$\partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$$

と書けるので，Lorentz 不変であることがただちにわかる．さらに，場の方程式 (10.3), (10.4) は

$$\Box \tilde{A}_\mu = \frac{\tilde{j}_\mu}{\varepsilon_0}, \quad \mu = 0,1,2,3,$$

となる．これも明白に Lorentz 共変な形である．ここに述べたゲージの取り方を **Lorentz ゲージ**とよぶ．

電磁場のエネルギー $H_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{cl}}$ と**運動量** $\boldsymbol{P}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{cl}} = (P_{\mathrm{EM},1}^{\mathrm{cl}}, P_{\mathrm{EM},2}^{\mathrm{cl}}, P_{\mathrm{EM},3}^{\mathrm{cl}})$ は

$$H_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{cl}} := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} d\boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x})^2 + \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})^2)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} \{[\partial_t \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})]^2 + [\nabla \times \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})]^2\}, \tag{10.19a}$$

$$\boldsymbol{P}^{\rm cl}_{\rm EM} := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{x} \sum_{j=1}^{3} \partial_t A_j(t,\boldsymbol{x}) \nabla A_j(t,\boldsymbol{x}) \tag{10.19b}$$

によって定義される ((10.19a), (10.19b) については，(10.1), (10.15), (10.14) を用いよ)．ただし，ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の外積を表す：

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} := (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

(10.18) とフーリエ変換を用いると，$a^{(r)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}})$ ならば，

$$H^{\rm cl}_{\rm EM} = \sum_{r=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, \hbar|\boldsymbol{k}|a^{(r)}(\boldsymbol{k})^* a^{(r)}(\boldsymbol{k}), \tag{10.20a}$$

$$P^{\rm cl}_{{\rm EM},j} = \sum_{r=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, \hbar k_j a^{(r)}(\boldsymbol{k})^* a^{(r)}(\boldsymbol{k}), \tag{10.20b}$$

であることがわかる[5]．

10-2 節　量子輻射場

量子電磁場の厳密な数学的構成に入る前に，電磁場の量子化に関わるある種の問題点に簡単にふれておく．電磁場の量子論においては，ゲージ不変性と関連して，ゲージの選び方に応じて，量子系の状態ベクトルの空間の構造が異なりうることが発見法的に示される．たとえば，相対論的共変性が明白に表される Lorentz ゲージを用いて量子化する場合には，状態のベクトル空間は，ヒルベルト空間ではなく，無限次元の不定内積空間でなければならない[6]．他方，Coulomb ゲージの場合には，状態ベクトルの空間として，ヒルベルト空間を選びうることが示唆される．ここでは，簡単のため，Coulomb ゲージにおける電磁場の量子論の数学的構成についてのみ論述する．不定内積空間を用いた，電磁場の量子論については，Wightman and Gårding (1964) を参照されたい．

Coulomb ゲージにおける電磁場の量子化の基本的アイディアは，de Broglie 場や

---

[5] 序章で (0.38), (0.39) を求めたのと同様の計算．

[6] ベクトル空間 $\mathscr{V}$ 上の準双線形形式 $B : \mathscr{V}\times\mathscr{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ で次の 2 つの条件をみたすものを $\mathscr{V}$ の**不定内積** (indefinite inner product) という：(i) (エルミート性) $B(u,v) = B(v,u)^*$ $(u,\ v \in \mathscr{V})$，(ii) 写像：$v \longrightarrow B(v,v)$ $(v \in \mathscr{V})$ は正負の値をとる．不定内積を備えたベクトル空間を**不定内積空間**という．ミンコフスキー空間は有限次元の不定内積空間の例である．一般に，$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，T を $\mathscr{H}$ 上の有界な自己共役作用素でそのスペクトル $\sigma(T)$ について，$\sigma(T)\cap(-\infty,0) \neq \varnothing$，$\sigma(T)\cap[0,\infty) \neq \varnothing$ が成り立つものとするとき，$\langle\psi,\phi\rangle_T := \langle\psi, T\phi\rangle$ $(\psi,\ \phi \in \mathscr{H})$ によって定義される準双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ はベクトル空間 $\mathscr{H}$ の不定内積である．

Klein-Gordon 場の場合と同様，古典解 (10.18) における任意関数 $a^{(r)}(\boldsymbol{k})$ を

$$[a^{(r)}(\boldsymbol{k}), a^{(s)}(\boldsymbol{k}')^*] = \delta_{rs}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{10.21a}$$

$$[a^{(r)}(\boldsymbol{k}), a^{(s)}(\boldsymbol{k}')] = 0, \quad r,\, s = 1, 2, \tag{10.21b}$$

($\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}' \in \mathbb{R}^3$) をみたす，作用素超関数に読み換えることである．このような作用素値超関数を実際に構成し，それらから定義される，量子化されたベクトルポテンシャルの性質を調べることがこの節の課題である．

数学的一般性をもたせるために，空間が d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ の場合について考察する．ただし，$d \geq 2$ とする[7]．この場合にも，前節の議論は容易に拡張される．

$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ の $d-1$ 個の直和

$$\mathscr{E} := \overset{d-1}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}) \tag{10.22}$$

から定まるボソンフォック空間を $\mathscr{F}_{\rm rad}$ とする：

$$\mathscr{F}_{\rm rad} := \mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{E}) = \mathop{\oplus}_{n=0}^{\infty} \mathop{\otimes}_{\rm s}^{n} \mathscr{E}. \tag{10.23}$$

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ に対して，

$$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{e}^{(s)}(\boldsymbol{k}) = \delta_{rs}, \quad \boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k} = 0, \quad r, s = 1, \cdots, d-1, \tag{10.24}$$

をみたすベクトル $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) \in \mathbb{R}^d$ $(r = 1, \cdots, d-1)$ を固定する．$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ は**偏極ベクトル** (polarization vector) とよばれる[8]．これらのベクトルの取り方は一意的ではない．また，$d \geq 3$ ならば，ベクトル値関数 $\boldsymbol{e}^{(r)} : \mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上全体にわたっては連続にとることはできない[9]．しかし，次の例が示すように，各 $\boldsymbol{e}^{(r)}$ はボレル可測であるようにはとれる．

例 10-1　各 $j = 1, \cdots, d$ に対して，$M_j := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, k_j = 0\}$ とおき，$\mathbb{S} := \mathbb{R}^d \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{d} M_j\right)$ とする．$\boldsymbol{k} \in \mathbb{S}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}^{(r)}(\boldsymbol{k}) = (w_1^{(r)}(\boldsymbol{k}), \cdots, w_d^{(r)}(\boldsymbol{k})) \in \mathbb{R}^d$ を $\boldsymbol{w}_j^{(r)}(\boldsymbol{k}) := \delta_{jr}k_r$ $(j = 1, \cdots, d)$ によって定義する．このとき，$\boldsymbol{k}, \boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{k}), \cdots, \boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})$ は 1 次独立である．そこで，これらのベクトルの組に対して，グラム-シュミットの直交化を行えばよい．実際，

---

[7] 理論の次元依存性を調べることは，量子現象の根底をなす理念的構造をより深く認識する上で重要である．

[8] 前節の偏極ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k})$ の d 次元版である．

[9] $d \geq 3$ ならば，$d-1$ 次元球面 $S^{d-1} = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d |\ |\boldsymbol{k}|^2 = 1\}$ 上の平行移動が一般には可換でないことによる．

$$\hat{\boldsymbol{k}} := \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|},$$

$$\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}) := \frac{\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{k}) - [\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{k})]\hat{\boldsymbol{k}}}{|\boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{k}) - [\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{w}^{(1)}(\boldsymbol{k})]\hat{\boldsymbol{k}}|},$$

$$\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{k}) := \frac{\boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{k}) - [\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{k})]\hat{\boldsymbol{k}} - [\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{k})]\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{k}) - [\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{k})]\hat{\boldsymbol{k}} - [\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{w}^{(2)}(\boldsymbol{k})]\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k})|},$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{e}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})$$

$$:= \frac{\boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k}) - [\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})]\hat{\boldsymbol{k}} - \sum_{l=1}^{d-2}[\boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})]\boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k}) - [\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})]\hat{\boldsymbol{k}} - \sum_{l=1}^{d-2}[\boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{w}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})]\boldsymbol{e}^{(l)}(\boldsymbol{k})|},$$

とすれば，$\{\hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}), \cdots, \boldsymbol{e}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})\}$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{S})$ は $\mathbb{R}^d$ の正規直交基底であり，各 $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ は $\mathbb{S}$ 上で連続である．したがって，集合 $\bigcup_{j=1}^{d} M_j$ 上では，たとえば，$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{k} \in \bigcup_{j=1}^{d} M_j)$ とすることにより，各 $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ は $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数となる．さらに，集合 $\bigcup_{j=1}^{d} M_j$ の d 次元ルベーグ測度は 0 であるから，$\{\hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}), \cdots, \boldsymbol{e}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})\}$ は a.e.$\boldsymbol{k}$ に対して，$\mathbb{R}^d$ の正規直交基底をなす．

$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の消滅作用素を $A(\mathfrak{f})$ $(\mathfrak{f} = (f_r)_{r=1}^{d-1} \in \mathscr{E})$ とし，$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の個数作用素を N_{rad} によって表す．各 $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ に対して，$\mathfrak{f}_r \in \mathscr{E}$ を

$$\mathfrak{f}_r = (0, \cdots, 0, \overbrace{f}^{r\ \text{番目}}, 0, \cdots, 0) \tag{10.25}$$

によって定義し，

$$a^{(r)}(f) := A(\mathfrak{f}_r) \tag{10.26}$$

とおく．対応 $a^{(r)} : f \longrightarrow a^{(r)}(f)$ は $\left(\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}, D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})\right)$ で働く作用素値超関数である．これを**量子電磁場の消滅作用素**とよぶ．共役作用素 $a^{(r)}(f)^*$ を**量子電磁場の生成作用素**という．

任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{E})$ 上で，

$$[a^{(r)}(f), a^{(s)}(g)^*] = \delta_{rs}\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{10.27a}$$

$$[a^{(r)}(f), a^{(s)}(g)] = 0, \quad [a^{(r)}(f)^*, a^{(s)}(g)^*] = 0, \quad r, s = 1, \cdots, d-1, \tag{10.27b}$$

が成立することは容易にわかる．こうして，(10.21a), (10.21b) をみたす作用素値超関数が構成される．

$\nu = d+1$ として，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ に対して，

$$(F_0 f)(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{\nu/2}} \int_{\mathbb{R}^\nu} f(t, \boldsymbol{x}) e^{i|\boldsymbol{k}|t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, dt d\boldsymbol{x} \tag{10.28}$$

を定義する．これは，$m = 0$ の場合の変換 F である ((9.11a) 式を参照)．運動量 $\boldsymbol{k}$ の自由光子の角振動数を $\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})$ とおく：

$$\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k}) := |\boldsymbol{k}|, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{10.29}$$

試料関数 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ によって均された $A_j(f)$ を

$$A_j(f) := \sum_{r=1}^{d-1} \sqrt{\pi\hbar} \left\{ a^{(r)} \left(\frac{e_j^{(r)} F_0 f}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}} \right)^* + a^{(r)} \left(\frac{e_j^{(r)} F_0 f^*}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}} \right) \right\}, \quad j = 1, \cdots, d, \tag{10.30}$$

によって定義する．ただし，$e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ の第 j 成分である：

$$\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k}) = (e_1^{(r)}(\boldsymbol{k}), \cdots, e_d^{(r)}(\boldsymbol{k})). \tag{10.31}$$

定理 10-1

(i) 各 $j = 1, \cdots, d$ に対して，対応：$A_j : f \longrightarrow A_j(f)$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu))$ は，$(\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}, D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2}))$ で働く作用素値超関数である．

(ii) $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$ が実数値ならば，$A_j(f)$ $(j = 1, \cdots, d)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{E})$ 上で本質的に自己共役である．

(iii) 部分空間

$$\mathscr{D}_{\mathrm{rad}} := \mathscr{L}\left\{ \Omega_{\mathscr{E}}, A_{j_1}(f_{j_1}) \cdots A_{j_n}(f_{j_n}) \Omega_{\mathscr{E}} \,\middle|\, n \geq 1,\, j_i = 1, \cdots, d,\, f_{j_i} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu) \right\}$$

は $\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ で稠密である．

(iv) 任意の $\Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})$ に対して，

$$A_j(\Box f)\Psi = 0, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu),\ j = 1, \cdots, d,$$

が成り立つ．

(v) 任意の $\Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{d} A_j(\partial_j f)\Psi = 0, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu), \tag{10.32}$$

が成り立つ.

証明 (i) 9-2-2 項と同様.

(ii) f が実数値ならば, $\Phi_{\mathrm{S}}(\cdot)$ を $\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の Segal の場の作用素として,

$$A_j(f) = \sqrt{2\pi\hbar}\,\Phi_{\mathrm{S}}(T_j(f)) \tag{10.33}$$

と書ける. ただし,

$$T_j(f) := (\omega_{\mathrm{ph}}^{-1/2} e_j^{(r)} F_0 f)_{r=1}^{d-1} \in \mathscr{E} \tag{10.34}$$

(これは, f が実数値でなくても定義される). したがって, 定理 4-30 (ii) の応用により, 題意が成立する.

(iii) まず, 部分空間

$$D_{1,\mathrm{rad}} := \mathscr{L}\{T_j(\hat{v} \times \check{u}) \,|\, v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}),\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\}),\, j = 1, \cdots, d\}$$

が $\mathscr{E}$ で稠密であることを示そう. $g = (g^{(r)})_{r=1}^{d-1} \in \mathscr{D}_{1,\mathrm{rad}}{}^\perp$ とすれば, 任意の $v \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^d \setminus \{0\})$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して

$$\left\langle \sum_{r=1}^{d-1} g^{(r)} e_j^{(r)}, \frac{v(\omega_{\mathrm{ph}} u)}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

これと補題 9-2 によって, $\sum_{r=1}^{d-1} g^{(r)}(\boldsymbol{k}) e_j^{(r)}(\boldsymbol{k}) = 0$ a.e.$\boldsymbol{k}$. 両辺に $e_j^{(s)}(\boldsymbol{k})$ をかけて, j について和をとり, (10.24) の第 1 番目の式を用いると $g^{(s)}(\boldsymbol{k}) = 0$ a.e.$\boldsymbol{k}$ となる. したがって, $g = 0$ である. ゆえに, $D_{1,\mathrm{rad}}$ は $\mathscr{E}$ で稠密である.

(9.23a) を用いたのと同様の仕方で, $\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{E})$ 上で

$$A(T_j(f)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{A_j(f) + iA_j(\partial_t h_0^{-1/2} f)\right\}, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^\nu), \tag{10.35}$$

が成立することを示すことができる. あとは命題 9-1 の証明と同様にして題意が示される.

(iv) Klein-Gordon 場の場合と同様 ((9.17), (9.18) を参照).

(v) 容易にわかるように, 各 $j = 1, \cdots, d$ に対して,

$$(F_0 \partial_j)(\boldsymbol{k}) = ik_j (F_0 f)(\boldsymbol{k})$$

であるので,

$$\sum_{j=1}^{d} e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})(F_0\partial_j f)(\boldsymbol{k}) = 0, \quad r = 1, \cdots, d-1, \tag{10.36}$$

が成り立つ．したがって，(10.32) が得られる． □

作用素値超関数の組

$$\boldsymbol{A}(f) := (A_1(f), \cdots, \boldsymbol{A}_d(f)) \tag{10.37}$$

を**量子輻射場** (quantized radiation field) とよぶ．

定理 10-1 (iv), (v) はそれぞれ，量子輻射場が，作用素値超関数の意味で，ダランーベール方程式と Coulomb ゲージ条件をみたすことを示す．こうして，Coulomb ゲージにおける電磁ポテンシャルの量子版が構成される．

量子輻射場を用いて，**量子電場** $\boldsymbol{E}(f) = (E_1(f), \cdots, E_d(f))$ と**量子磁場** $F_{jl}(f)$ $(f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu))$ を次のように定義する[10]：

$$E_j(f) := A_j(\partial_t f), \tag{10.38a}$$

$$F_{jl}(f) := A_j(\partial_l f) - A_l(\partial_j f), \quad j, l = 1, \cdots, d,\ j \neq l. \tag{10.38b}$$

量子輻射場の交換関係を求めてみよう．(10.27a), (10.27b) から，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{E})$ 上で，

$$[A_j(f), A_l(g)] = \pi\hbar\left\{\left\langle F_0 f^*, \frac{e_{jl}}{\omega_{\mathrm{ph}}} F_0 g\right\rangle - \left\langle F_0 g^*, \frac{e_{jl}}{\omega_{\mathrm{ph}}} F_0 f\right\rangle\right\},$$

$$j, l = 1, \cdots, d, \tag{10.39}$$

を得る．ただし，

$$e_{jl}(\boldsymbol{k}) := \sum_{r=1}^{d-1} e_j^{(r)}(\boldsymbol{k}) e_l^{(r)}(\boldsymbol{k}). \tag{10.40}$$

9-6 節で登場した超関数 Δ_+ の変種として，

$$\Delta_{jl}^{(+)}(f) := \frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2} i} \int_{\mathbb{R}^d} e_{jl}(\boldsymbol{k}) \frac{(F_0 f)(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}\, d\boldsymbol{k} \tag{10.41}$$

によって，超関数 $\Delta_{jl}^{(+)} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}_x^\nu)$ が定義される．これを用いて，超関数

$$\Delta_{jl}(x) := \Delta_{jl}^{(+)}(x) - \Delta_{jl}^{(+)}(-x) \tag{10.42}$$

を導入する．このとき，(9.84) を得たのと同様にして，(10.39) から，$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{E})$ 上で，

$$[A_j(f), A_l(g)] = i\hbar \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} f(x) \Delta_{jl}(x-y) g(y)\, dx dy \tag{10.43}$$

---

[10] 古典論の定義式 (10.1) の作用素値超関数方程式版を考える．

が導かれる．

正規直交系 $\{\hat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{k}), \cdots, \boldsymbol{e}^{(d-1)}(\boldsymbol{k})\}$ の完全性により，

$$e_{jl}(\boldsymbol{k}) = \delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{|\boldsymbol{k}|^2} \tag{10.44}$$

が成り立つことに注意しよう．したがって，超関数 $\Delta_{jl}^{(+)}$ は

$$\Delta_{jl}^{(+)}(f) = \frac{1}{2(2\pi)^{(d-1)/2}i} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\delta_{jl} - \frac{k_j k_l}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) \frac{(F_0 f)(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|}\, d\boldsymbol{k} \tag{10.45}$$

とも表される．

$\Omega_{\mathscr{E}}$ を $\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ のフォック真空とすれば，

$$\begin{aligned}\langle \Omega_{\mathscr{E}}, A_j(f)A_l(g)\Omega_{\mathscr{E}}\rangle &= i\hbar \int_{\mathbb{R}^\nu} f(x)\Delta_{jl}^{(+)}(x-y)g(y)\, dxdy \\ &= i\hbar(\Delta_{jl}^{(+)} * g)(f), \quad f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu),\ j, l = 1, \cdots, d,\end{aligned} \tag{10.46}$$

が成立する．ただし，$\Delta_{jl}^{(+)} * g$ は $\Delta_{jl}^{(+)}$ と g の合成積である (付録 D，D-7 節を参照)．量子輻射場の任意の個数の積の真空期待値

$$\langle \Omega_{\mathscr{E}}, A_{l_1}(f_{l_1}) \cdots A_{l_n}(f_{l_n})\Omega_{\mathscr{E}}\rangle$$

$(n \in \mathbb{N}, l_i = 1, \cdots, d,\ f_{l_i} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu))$ は自由な量子 Klein-Gordon 場の場合と同様にして計算される．その結果は次の通りである ((9.89a), (9.89b) を参照)：

$$\langle \Omega_{\mathscr{E}}, A_{l_1}(f_{l_1}) \cdots A_{l_{2n+1}}(f_{l_{2n+1}})\Omega_{\mathscr{E}}\rangle = 0, \tag{10.47a}$$

$$\begin{aligned}&\langle \Omega_{\mathscr{E}}, A_{l_1}(f_{l_1}) \cdots A_{l_{2n}}(f_{l_{2n}})\Omega_{\mathscr{E}}\rangle \\ &= (i\hbar)^n \sum_{\mathrm{comb}} (\Delta_{l_{i_1} l_{j_1}}^{(+)} * f_{l_{j_1}})(f_{l_{i_1}}) \cdots (\Delta_{l_{i_n} l_{j_n}}^{(+)} * f_{l_{j_n}})(f_{l_{i_n}}).\end{aligned} \tag{10.47b}$$

10-3 節　鋭時刻場

$\mathbb{R}^d$ の緩増加超関数の空間 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の 1 つの部分空間

$$\mathscr{M}_{-1/2}(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f}/\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})\} \tag{10.48}$$

を導入し，各 $t \in \mathbb{R}$ と $f \in \mathscr{M}_{-1/2}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の作用素 $A_j(t, f)$ $(j = 1, \cdots, d)$ を

$$A_j(t,f) := \sum_{r=1}^{d-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\{a^{(r)}\left(\frac{e_j^{(r)}e^{i\omega_{\rm ph}t}\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}\right)^* + a^{(r)}\left(\frac{e_j^{(r)}e^{i\omega_{\rm ph}t}\hat{f^*}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}\right)\right\}, \quad (10.49)$$

によって定義する．対応：$f \longrightarrow A_j(t,f)$ を**時刻** $t\in\mathbb{R}$ **の量子輻射場**という．f を $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に制限すれば，$A_j(t,f)$ は $(\mathscr{F}_{\rm rad}, D(N_{\rm rad}^{1/2}))$ で働く作用素値超関数であり，任意の $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^d)$ と $\Psi\in D(N_{\rm rad}^{1/2})$ に対して，

$$A_j(g\times f)\Psi = \int_{\mathbb{R}} g(t)A_j(t,f)\Psi\,dt \quad (10.50)$$

が成り立つ．容易にわかるように，任意の $t\in\mathbb{R}$, f, $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ $(j,\, l=1,\cdots,d)$ に対して，$\mathscr{F}_{\rm b,0}(\mathscr{E})$ 上で

$$[A_j(t,f), A_l(t,g)] = 0, \quad (10.51)$$

が成立する．すなわち，同時刻の量子輻射場は $\mathscr{F}_{\rm b,0}(\mathscr{E})$ 上で可換である．

作用素値超関数 $a^{(r)}(f)$ の超関数核を $a^{(r)}(\boldsymbol{k})$ と書き，時刻 t の量子輻射場の作用素値超関数核を $A_j(t,\boldsymbol{x})$ と記す．このとき，(10.49) は象徴的に

$$A_j(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{r=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k})}}e_j^{(r)}(\boldsymbol{k}) \times\left\{a^{(r)}(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^{(r)}(\boldsymbol{k})e^{-i\omega_{\rm ph}(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\}d\boldsymbol{k} \quad (10.52)$$

と書かれる[11)].

定理 10-2

(i) $f\in\mathscr{M}_{-1/2}(\mathbb{R}^d)$ が実数値ならば，$A_j(t,f)$ $(t\in\mathbb{R},\, j=1,\cdots,d)$ は $\mathscr{F}_{\rm b,fin}(\mathscr{E})$ 上で本質的に自己共役である．

(ii) 任意の $\Psi\in D(N_{\rm rad}^{1/2})$ と $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$A_j(t,f)\Psi$ は t について無限回強微分微分可能であり，

$$\{\partial_t^2 A_j(t,f) - A_j(t,\Delta f)\}\Psi = 0, \quad j=1,\cdots,d, \quad (10.53)$$

が成り立つ．

(iii) 任意の $\Psi\in D(N_{\rm rad}^{1/2})$ と $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{d} A_j(t,\partial_j f)\Psi = 0.$$

---

11) これは，通常，物理の教科書で使われる形式的な表示である．だが，これは，後に見るように (10-6 節)，点様の自由な量子 Klein-Gordon 場の場合と同様にして，準双線形形式として数学的な意味をもつことが示される．

証明　(i) 定理 10-1 (ii) と同様.

(ii) 任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して，$\hat{f}/\sqrt{\omega_{\rm ph}} \subset C^\infty(\omega_{\rm ph})$ を示すの難しくない．したがって，補題 4-49 によって，$A_j(t,f)\Psi$ は t について無限回強微分可能であり，

$$\partial_t^2 A_j(t,f)$$

$$= -\sum_{r=1}^{d-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\{a^{(r)}\left(\frac{e_j^{(r)}e^{i\omega_{\rm ph}t}\omega_{\rm ph}^2\hat{f}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}\right)^* + a^{(r)}\left(\frac{e_j^{(r)}e^{i\omega_{\rm ph}t}\omega_{\rm ph}^2\hat{f^*}}{\sqrt{\omega_{\rm ph}}}\right)\right\}.$$

他方，

$$\omega_{\rm ph}^2\hat{f} = \widehat{-\Delta f}.$$

これらの関係式から，(10.53) が得られる．

(iii) これは，各 $j = 1,\cdots,d$ に対して，

$$\widehat{\partial_j f}(\boldsymbol{k}) = ik_j\hat{f}(\boldsymbol{k})$$

であることと $\boldsymbol{e}^{(r)}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k} = 0$ からしたがう．□

時刻 t での量子輻射場 $A_j(t,f)$ の正準共役場を

$$\pi_j(t,f) := \sum_{r=1}^{d-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,i\Big\{a^{(r)}(e_j^{(r)}\sqrt{\omega_{\rm ph}}e^{i\omega_{\rm ph}t}\hat{f})^* - a^{(r)}(e_j^{(r)}\sqrt{\omega_{\rm ph}}e^{i\omega_{\rm ph}t}\hat{f^*})\Big\},$$

$$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}),\ j = 1,\cdots,d, \tag{10.54}$$

によって定義する．これも $(\mathscr{F}_{\rm rad}, D(N_{\rm rad}^{1/2}))$ で働く作用素値関数である．任意の $\Psi \in D(N_{\rm rad}^{1/2})$ に対して，

$$\pi_j(t,f)\Psi = \partial_t A_j(t,f)\Psi, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}),\ j = 1,\cdots,d, \tag{10.55}$$

が成り立っている．

簡単な計算から，任意の $s,\ t \in \mathbb{R},\ f,\ g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ j,\ l = 1,\cdots,d$ に対して，$\mathscr{F}_{\rm b,0}(\mathscr{E})$ 上で，

$$[A_j(t,f),\pi_l(s,g)]$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e_{jl}(\boldsymbol{k})\left\{\hat{f}(-\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})e^{-i|\boldsymbol{k}|(t-s)} + \hat{f}(\boldsymbol{k})\hat{g}(-\boldsymbol{k})e^{i|\boldsymbol{k}|(t-s)}\right\}d\boldsymbol{k} \tag{10.56}$$

がわかる．特に，同時刻 $s = t$ の場合，

$$[A_j(t,f),\pi_l(t,g)] = i\hbar\int_{\mathbb{R}^d} e_{jl}(\boldsymbol{k})\hat{f}(-\boldsymbol{k})\hat{g}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}. \tag{10.57}$$

そこで，汎関数 $\delta_{jl}^{\rm tr}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathbb{C}$ を

$$\delta_{jl}^{\rm tr}(f):=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}e_{jl}(\boldsymbol{k})\hat{f}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\hat{f}(\boldsymbol{k})\,d\boldsymbol{k} \tag{10.58}$$

によって定義すれば，これは，$\mathbb{R}^d$ 上の緩増加超関数であることがわかる[12)]．この緩増加超関数を**横デルタ超関数** (transverse delta distribution) とよぶ[13)]．これを用いると，(10.57) は

$$[A_j(t,f),\pi_l(t,g)]=i\hbar\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}f(\boldsymbol{x})\delta_{jl}^{\rm tr}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

$$=i\hbar(\delta_{jl}^{\rm tr}*g)(f) \tag{10.59}$$

と書ける．

時刻 $t\in\mathbb{R}$ の電場を

$$E_j(t,f)\Psi:=-\partial_tA_j(t,f)\Psi,\quad \Psi\in D(N_{\rm rad}^{1/2}),\ f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ j=1,\cdots,d, \tag{10.60}$$

によって定義する (定理 10-2 (ii) によって可能)．すると，

$$\pi_j(t,f)=-E_j(t,f)\quad (D(N_{\rm rad}^{1/2})\ 上) \tag{10.61}$$

および

$$E_j(g\times f)\Psi=\int_{\mathbb{R}}g(t)E_j(t,f)\Psi\,dt,\quad \Psi\in D(N_{\rm rad}^{1/2}),\ g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}),\ f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{10.62}$$

が成り立つ．

時刻 t の磁場 $F_{jl}(t,f)$ ($j,\ l=1,\cdots,d, j\neq l, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$) は次のように定義される：

$$F_{jl}(t,f):=A_j(t,\partial_lf)-A_l(t,\partial_jf). \tag{10.63}$$

このとき，$j,l=1,\cdots,d$ ($j\neq l$) に対して，

---

12) 添字 "tr" は "transverse wave" (横波) の意．Coulomb ゲージでのベクトルポテンシャルは横波である (注意 10-2 を参照)．

13) (10.58) の右辺の被積分関数において，$k_jk_l/|\boldsymbol{k}|^2$ の項がなければ，(10.58) の右辺は，$\delta_{jl}\delta(f)$ になる．したがって，$\delta_{jl}^{\rm tr}$ は，$\delta_{jl}\delta$ のある種の変形と見ることができる．

$$F_{jl}(g \times f)\Psi = \int_{\mathbb{R}} g(t) F_{jl}(t, f)\Psi \, dt, \quad \Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2}), \quad g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \tag{10.64}$$

が成り立つ.

10-4 節　ハミルトニアンと運動量作用素

光子のエネルギー関数 $\hbar\omega_{\mathrm{ph}}$ から，$\mathscr{E}$ 上で働く非負自己共役作用素

$$h_{\mathrm{rad}} := \overset{d-1}{\oplus} \hbar\omega_{\mathrm{ph}} \tag{10.65}$$

が定義される (右辺は直和作用素). この作用素の第 2 量子化

$$H_{\mathrm{rad}} := d\Gamma_{\mathrm{b}}(h_{\mathrm{rad}}) \tag{10.66}$$

を**自由な量子輻射場のハミルトニアン**とよぶ. 実際，次の定理が成り立つ.

定理 10-3

(i)　任意の $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $\Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})$, $j = 1, \cdots, d$ に対して,

$$A_j(f_{(t,\mathbf{0})})\Psi = e^{itH_{\mathrm{rad}}/\hbar} A_j(f) e^{-itH_{\mathrm{rad}}/\hbar}\Psi.$$

(ii)　任意の $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})$, $j = 1, \cdots, d$ に対して,

$$A_j(t, f)\Psi = e^{itH_{\mathrm{rad}}/\hbar} A_j(0, f) e^{-itH_{\mathrm{rad}}/\hbar}\Psi.$$

証明　(i) 補題 4-48, (10.33), (10.34) によって,

$$e^{itH_{\mathrm{rad}}/\hbar} A_j(f) e^{-itH_{\mathrm{rad}}/\hbar}\Psi$$

$$= \sum_{r=1}^{d-1} \sqrt{\pi\hbar} \left\{ a^{(r)}\left(\frac{e^{it\omega_{\mathrm{ph}}} e_j^{(r)} F_0 f}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}} \right)^* + a^{(r)}\left(\frac{e^{it\omega_{\mathrm{ph}}} e_j^{(r)} F_0 f^*}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}} \right) \right\}\Psi,$$

を得る. 一方,

$$(F_0 f_{(t,\mathbf{0})})(\boldsymbol{k}) = e^{it\omega_{\mathrm{ph}}} F_0 f, \quad (F_0 f^*_{(t,\mathbf{0})})(\boldsymbol{k}) = e^{it\omega_{\mathrm{ph}}} F_0 f^*,$$

である. したがって，上式の右辺は $A_j(f_{(t,\mathbf{0})})$ に等しい. したがって，求める結果を得る.

(ii) (i) と同様. □

自由な量子輻射場の運動量作用素 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{rad}} = (P_{\mathrm{rad},1}, \cdots, P_{\mathrm{rad},d})$ は

$$P_{\mathrm{rad},j} := d\Gamma_{\mathrm{b}}\left(\overset{d-1}{\oplus}\,\mathfrak{p}_j\right) \tag{10.67}$$

によって定義される．ただし，$\mathfrak{p}_j$ は (8.29) で定義される関数である ($\overset{d-1}{\oplus}\,\mathfrak{p}_j$ は $\mathscr{E}$ 上で働く直和作用素であり，自己共役である)．自由な量子 Klein-Gordon 場の運動量作用素の場合と同様にして，エネルギー・運動量作用素

$$P_{\mathrm{rad}} := (H_{\mathrm{rad}}, \boldsymbol{P}_{\mathrm{rad}}) \tag{10.68}$$

は強可換であることがわかる．定理 10-3 の証明と同じ方法で，次の事実が証明される：

定理 10-4

(i) 任意の $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^\nu)$, $\Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})$, $j = 1, \cdots, d$ に対して，

$$A_j(f_{(0,\boldsymbol{a})})\Psi = e^{-i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}_{\mathrm{rad}}}/\hbar} A_j(f) e^{i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}_{\mathrm{rad}}}/\hbar}\Psi.$$

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\Psi \in D(N_{\mathrm{rad}}^{1/2})$, $j = 1, \cdots, d$ に対して，

$$A_j(t, f_{\boldsymbol{a}})\Psi = e^{-i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}_{\mathrm{rad}}}/\hbar} A_j(t, f) e^{i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}_{\mathrm{rad}}}/\hbar}\Psi.$$

ハミルトニアンと運動量作用素のスペクトルは次のようになる (定理 4-14 を応用すれば，証明は容易)：

$$\sigma(H_{\mathrm{rad}}) = [0, \infty), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{rad}}) = \{0\}, \tag{10.69}$$

$$\sigma(P_{\mathrm{rad},j}) = \mathbb{R}, \quad \sigma_{\mathrm{p}}(P_{\mathrm{rad},j}) = \{0\}, \quad j = 1, \cdots, d. \tag{10.70}$$

ここで，固有値 $\{0\}$ に属する固有ベクトルは (定数倍を除いて) フォック真空 $\Omega_{\mathscr{E}}$ である．光子の質量が 0 であるために，ハミルトニアンのスペクトルは零から無限大にわたって連続的に分布することに注意しよう ((9.37a) を参照)．

量子輻射場のエネルギー・運動量スペクトル，すなわち，P_{rad} の結合スペクトルは，定理 9-7 と同様して，

$$\sigma_{\mathrm{J}}(P_{\mathrm{rad}}) = \overline{V}_+ \tag{10.71}$$

であることが証明される．

10-5 節　運動量切断をもつ点様の量子輻射場

$\varrho, \varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}$ ($\kappa > 0, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$) を 9-8 節のものとする．自由な量子 Klein-Gordon 場の場合と同様に，**運動量切断 κ をもつ点様の量子輻射場**

$$\boldsymbol{A}_\kappa(t,\boldsymbol{x}) := (A_{\kappa,1}(t,\boldsymbol{x}),\cdots,A_{\kappa,d}(t,\boldsymbol{x}),\quad (t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^\nu, \tag{10.72}$$

を

$$A_{\kappa,j}(t,\boldsymbol{x}) := A_j(t,\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}) \tag{10.73}$$

$$= \sum_{r=1}^{d-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left\{a^{(r)}\left(\frac{e_j^{(r)}\check{\varrho}(\kappa^{-1}\cdot)e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}e^{i\omega_{\mathrm{ph}}t}}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}}\right)^* + a^{(r)}\left(\frac{e_j^{(r)}\check{\varrho}(\kappa^{-1}\cdot)e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}/\hbar}e^{i\omega_{\mathrm{ph}}t}}{\sqrt{\omega_{\mathrm{ph}}}}\right)\right\} \tag{10.74}$$

によって定義する．$\varrho_{\kappa,\boldsymbol{x}}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ は実数値であるから，定理 10-2 (i) により，$A_{\kappa,j}(t,\boldsymbol{x})$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{E})$ 上で本質的に自己共役である．

量子輻射場 $A_{\kappa,j}(t,\boldsymbol{x})$ の 2 点真空期待値は次のようになる：

$$\langle\Omega_{\mathscr{E}}, A_{\kappa,j}(t,\boldsymbol{x})A_{\kappa,l}(s,\boldsymbol{y})\Omega_{\mathscr{E}}\rangle = \frac{\hbar}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e_{jl}(\boldsymbol{k})\frac{e^{-i(t-s)|\boldsymbol{k}|+i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{|\boldsymbol{k}|}|\check{\varrho}(\boldsymbol{k}/\kappa)|^2\,d\boldsymbol{k},$$

$$(t,\boldsymbol{x}),(s,\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^\nu,\ j,l=1,\cdots,d. \tag{10.75}$$

10-6 節　同値な表現 — 自然な同型対応

定理 4-55 と定理 4-56 によって，$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ から $\overset{d-1}{\otimes}\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ へのユニタリ作用素 U_d で次の性質をみたすものが存在する：

(i)　$U_d\Omega_{\mathscr{E}} = \overset{d-1}{\otimes}\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}$.

(ii)　$U_d\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{E}) = \overset{d-1}{\hat{\otimes}}\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$.

(iii)　任意の $f\in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ と $r=1,\cdots,d-1$ に対して，

$$U_d a^{(r)}(f)U_d^{-1} = I\otimes\cdots I\otimes\overbrace{a(f)}^{r\text{ 番目}}\otimes I\cdots\otimes I.$$

ただし，$a(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上の消滅作用素である．

(iv)

$$U_d H_{\mathrm{rad}} U_d^{-1} = \sum_{r=1}^{d-1} I\otimes\cdots I\otimes \overbrace{d\Gamma_{\mathrm{b}}(\hbar\omega_{\mathrm{ph}})}^{r\text{ 番目}}\otimes I\cdots\otimes I.$$

(v)

$$U_d P_{\mathrm{rad},j} U_d^{-1} = \sum_{r=1}^{d-1} I \otimes \cdots I \otimes \overbrace{d\Gamma_{\mathrm{b}}(\mathfrak{p}_j)}^{r\text{ 番目}} \otimes I \cdots \otimes I.$$

この同型から，$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ がさらに具象的なヒルベルト空間と自然な仕方で同一視できることを示そう．

$d, p \in \mathbb{N}$ に対して，$(\mathbb{R}^d)^p = \mathbb{R}^{dp}$ の元を

$$\boldsymbol{k}^{(p)} = (\boldsymbol{k}_1^{(p)}, \cdots, \boldsymbol{k}_p^{(p)}), \quad \boldsymbol{k}_j \in \mathbb{R}^d,\ j = 1, \cdots, p,$$

のように表す．任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して，$\boldsymbol{k}_\sigma^{(p)} \in \mathbb{R}^{dp}$ を

$$\boldsymbol{k}_\sigma^{(p)} := (\boldsymbol{k}_{\sigma(1)}^{(p)}, \cdots, \boldsymbol{k}_{\sigma(p)}^{(p)})$$

によって定義する．$p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{N}$ とする．$L^2(\mathbb{R}^{dp_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dp_n})$ の元 ψ で各変数 $\boldsymbol{k}^{(p_j)}$ について対称なもの，すなわち，すべての $\sigma_j \in \mathfrak{S}_{p_j}$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$\psi(\boldsymbol{k}_{\sigma_1}^{(p_1)}; \cdots; \boldsymbol{k}_{\sigma_n}^{(p_n)}) = \psi(\boldsymbol{k}^{(p_1)}; \cdots; \boldsymbol{k}^{(p_n)}) \quad \text{a.e.}$$

をみたすものの全体を $L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dp_n})$ と記す．この集合は，$L^2(\mathbb{R}^{dp_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dp_n})$ の閉部分空間になるのでヒルベルト空間である．

4 章，例 4-1 によって，任意の $n \geq 2$ に対して，

$$\overset{n}{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d)) \cong \bigoplus_{p_1, \cdots, p_n = 0}^{\infty} \bigotimes_{j=1}^{n} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_j}). \tag{10.76}$$

定理 1-7 と同様にして，ユニタリ変換

$$W_n : \bigotimes_{j=1}^{n} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_j}) \longrightarrow L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dp_n})$$

で

$$W_n(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n) = \psi_1 \times \cdots \times \psi_n, \quad \psi_j \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_j}),\ j = 1, \cdots, n,$$

をみたすものがただ 1 つ存在することがわかる．この意味で，

$$\bigotimes_{j=1}^{n} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_j}) \cong L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dp_n}) \tag{10.77}$$

と記す．したがって，

$$\mathfrak{F}_n(L^2(\mathbb{R}^d)) := \bigoplus_{p_1, \cdots, p_n = 0}^{\infty} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{dp_n}) \tag{10.78}$$

とおけば，

$$\overset{n}{\otimes} \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d)) \cong \mathfrak{F}_n(L^2(\mathbb{R}^d)) \tag{10.79}$$

が成り立つ．以下，$\mathfrak{F}_n(L^2(\mathbb{R}^d))$ の元を

$$\Psi = \{\Psi^{(p_1,\cdots,p_n)}\}_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty}, \quad \Psi^{(p_1,\cdots,p_n)} \in L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{dp_n})$$

のように表す．

(10.79) の同型をあたえるユニタリ変換を V_n としよう．すなわち，V_n は，任意の $\Psi_j = \{\Psi_j^{(p)}\}_{p=0}^{\infty} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ $(j=1,\cdots,n)$ に対して，

$$V_n(\Psi_1\otimes\cdots\otimes\Psi_n) = \{\Psi_1^{(p_1)}\times\cdots\times\Psi_n^{(p_n)}\}_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty} \tag{10.80}$$

となる，$\overset{n}{\otimes}\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ から $\mathfrak{F}_n(L^2(\mathbb{R}^d))$ へのユニタリ変換である．

ヒルベルト空間 $\overset{n}{\otimes}\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の消滅作用素を

$$a_j(f) := I\otimes\cdots I\otimes\overset{j\text{ 番目}}{\overbrace{a(f)}}\otimes I\cdots\otimes I, \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d),\ j=1,\cdots,n, \tag{10.81}$$

によって定義する．これに対して，

$$a_j'(f) := V_n a_j(f) V_n^{-1}, \quad f\in L^2(\mathbb{R}^d) \tag{10.82}$$

とおく．このとき，4 章，例 4-2 と同様にして，

$$\begin{aligned}&(a_j'(f)\Psi)^{(p_1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)})\\ &= \sqrt{p_j+1}\int_{\mathbb{R}^d}\Psi^{(p_1,\cdots,p_j+1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}^{(p_j)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)})f(\boldsymbol{k})^*\,d\boldsymbol{k},\\ &\qquad \Psi\in D(a_j'(f)), \quad j=1,\cdots,n,\end{aligned} \tag{10.83}$$

を示すことができる．

$\mathfrak{F}_n(L^2(\mathbb{R}^d))$ の部分空間

$$\begin{aligned}D^n_{\mathscr{S}}(L^2(\mathbb{R}^d)) := \Bigg\{\Psi\in\hat{\bigoplus_{p_1,\cdots,p_n=0}^{\infty}} L^2_{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}^{dp_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{dp_n})\ \Bigg|\ &\Psi^{(p_1,\cdots,p_n)}\\ &\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{d(p_1+\cdots+p_n)}),\ p_j\ge 0, j=1,\cdots,n\Bigg\},\end{aligned} \tag{10.84}$$

を導入し，各 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d$ と $j=1,\cdots,n$ に対して，$\mathfrak{F}_n(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の作用素 $a_j'(\boldsymbol{k})$ を次のように定義する：

$$D(a_j'(\boldsymbol{k})) := D^n_{\mathscr{S}}(L^2(\mathbb{R}^d)), \tag{10.85a}$$

$$(a_j'(\boldsymbol{k})\Psi)^{(p_1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)})$$

$$= \sqrt{p_j+1}\,\Psi^{(p_1,\cdots,p_j+1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}^{(p_j)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)}),$$

$$\Psi \in D(a'_j(\boldsymbol{k})). \tag{10.85b}$$

このとき，任意の $\Psi \in D^n_{\mathscr{S}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ に対して，

$$a'_j(f)\Psi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{k})^* a'_j(\boldsymbol{k})\Psi\, d\boldsymbol{k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),\ j=1,\cdots,n, \tag{10.86}$$

が成り立つ (右辺は強積分).

さらに，h を $\mathbb{R}^d$ 上の a.e. 有限な実数値ボレル可測関数とし，

$$H_j(h) := I\otimes\cdots I\otimes \overbrace{d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)}^{j\text{ 番目}}\otimes I\cdots\otimes I, \tag{10.87a}$$

$$H'_j(h) := V_n H_j(h) V_n^{-1}, \quad j=1,\cdots,n, \tag{10.87b}$$

とすれば，

$$(H'_j(h)\Psi)^{(p_1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)})$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{p_j} h(\boldsymbol{k}_l^{(p_j)})\right)\Psi^{(p_1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)}), \quad \Psi\in D(H'_j(h)), \quad j=1,\cdots,n, \tag{10.88}$$

もわかる．

以上の一般的事実を量子輻射場の場合にあてはめると次のようになる (上の叙述で $n=d-1$ の場合を考えればよい)：

$$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}} \cong \mathfrak{F}_{d-1}(L^2(\mathbb{R}^d)). \tag{10.89}$$

この同型をあたえる，$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ から $\mathfrak{F}_{d-1}(L^2(\mathbb{R}^d))$ へのユニタリ変換は

$$Y_d := V_{d-1}U_d \tag{10.90}$$

である．さらに，

$$\tilde{a}^{(r)}(f) := Y_d a^{(r)}(f) Y_d^{-1},\ r=1,\cdots,d-1, f\in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{10.91}$$

$$\tilde{H}_{\mathrm{rad}} := Y_d H_{\mathrm{rad}} Y_d^{-1}, \tag{10.92}$$

$$\tilde{P}_{\mathrm{rad},j} := Y_d P_{\mathrm{rad},j} Y_d^{-1}, \quad j=1,\cdots,d, \tag{10.93}$$

とおけば，

$$(\tilde{a}^{(r)}(f)\Psi)^{(p_1,\cdots,p_{d-1})}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_{d-1})})$$

$$= \sqrt{p_r + 1} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi^{(p_1,\cdots,p_r+1,\cdots,p_{d-1})}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}^{(p_r)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_{d-1})}) f(\boldsymbol{k})^*\, d\boldsymbol{k},$$

$$\Psi \in D(\tilde{a}^{(r)}(f)),\ r = 1,\cdots,d-1, \tag{10.94}$$

$$(\tilde{H}_{\mathrm{rad}}\Psi)^{(p_1,\cdots,p_{d-1})}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_{d-1})})$$

$$= \sum_{j=1}^{d-1}\left(\sum_{l=1}^{p_j} \omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k}_l^{(p_j)})\right)\Psi^{(p_1,\cdots,p_{d-1})}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_{d-1})}),$$

$$\Psi \in D(\tilde{H}_{\mathrm{rad}}), \tag{10.95}$$

$$(\tilde{P}_{\mathrm{rad},j}\Psi)^{(p_1,\cdots,p_{d-1})}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_{d-1})})$$

$$= \sum_{i=1}^{d-1}\left(\sum_{l=1}^{p_i} \hbar\boldsymbol{k}_{lj}^{(p_i)}\right)\Psi^{(p_1,\cdots,p_{d-1})}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_{d-1})}),$$

$$\Psi \in D(\tilde{P}_{\mathrm{rad},j}),\ j = 1,\cdots,d. \tag{10.96}$$

ただし，$\boldsymbol{k}_{lj}^{(p)}$ $(l = 1,\cdots,p,\ j = 1,\cdots,d)$ はベクトル $\boldsymbol{k}_l^{(p)} \in \mathbb{R}^d$ の第 j 成分を表す.

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ と $r = 1,\cdots,d-1$ に対して，作用素 $\tilde{a}^{(r)}(\boldsymbol{k})$ を

$$(\tilde{a}^{(r)}(\boldsymbol{k})\Psi)^{(p_1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)})$$

$$= \sqrt{p_r + 1}\,\Psi^{(p_1,\cdots,p_r+1,\cdots,p_n)}(\boldsymbol{k}^{(p_1)};\cdots;\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}^{(p_r)};\cdots;\boldsymbol{k}^{(p_n)}),$$

$$\Psi \in D_{\mathscr{S}}^{d-1}(L^2(\mathbb{R}^d)), \tag{10.97}$$

によって定義すれば,

$$\tilde{a}^{(r)}(f)\Psi = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{k})^* \tilde{a}^{(r)}(\boldsymbol{k})\Psi\, d\boldsymbol{k}, \quad \Psi \in D_{\mathscr{S}}^{d-1}(L^2(\mathbb{R}^d)), \tag{10.98}$$

が成り立つ. 作用素 $\tilde{a}(\boldsymbol{k})$ を $\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ に引き戻した作用素

$$a^{(r)}(\boldsymbol{k}) := Y_d^{-1}\tilde{a}^{(r)}(\boldsymbol{k})Y_d \tag{10.99}$$

は，$a^{(r)}(\cdot)$ の超関数核と同一視される.

各 $x = (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^\nu$ に対して，$D_{\mathscr{S}}^{d-1}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の準双線形形式 $\tilde{A}_j(x)$ $(j = 1,\cdots,d)$ を

$$\tilde{A}_j(x) := \sum_{r=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2(2\pi)^d\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})}} e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})$$

$$\times \left\{\tilde{a}^{(r)}(\boldsymbol{k})^* e^{i\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \tilde{a}^{(r)}(\boldsymbol{k})e^{-i\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right\} d\boldsymbol{k} \tag{10.100}$$

によって定義する[14]．これを**点様の自由な量子輻射場**という．

注意 10-4 通常，ここで述べた同型は，いちいちユニタリ変換 Y_d に言及しないで使われる場合が多い．ヒルベルト空間 $\mathfrak{F}_{d-1}(L^2(\mathbb{R}^d))$ を用いた形式の方が具象的なので，問題によっては，この表現の方が有用でありうる．

ノート

電磁場の量子論を数学的に厳密に構成することは，物質場と電磁場の相互作用を量子力学的に記述する理論 — **量子電磁力学** (quantum electrodynamics) — の数学的基礎づけのための出発点の 1 つである．本章で行った，自由な量子輻射場の数学的構成は相対論的に共変的ではない．相対論的に共変的な形で量子輻射場を構成するには，不定計量の内積空間が必要とされる．これについては，Wightman and Gårding (1964) や Strocchi and Wightman (1974) を参照されたい．しかし，本書の 13 章で論じる非相対論的量子電磁力学に関しては，この章の理論構成の仕方で十分である．不定計量内積空間を用いた場の量子論の最近の研究として，Alberevro, Gottschlk and Wu (1997), Hofmann (1997) がある．

10 章演習問題

♮**1.** $A=(\phi,\boldsymbol{A})$ を電磁ポテンシャルとし，$\phi,\ A_j\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)$ とする．$D^{\mathrm{c}}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$ をダランベールシャン $\Box$ に対する基本解の 1 つとする[15]：

$$\Box D^{\mathrm{c}}(x)=\delta(x).$$

$\Lambda:=D^{\mathrm{c}}*(\partial_t\phi+\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})$ (合成積) とし，$A'=(\phi',\boldsymbol{A}')=G_\Lambda(A)$ とおく．このとき，A' は Lorentz 条件

$$\partial_t\phi'+\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}'=0$$

をみたすことを示せ．

2. 4 次元のダランベールシャン $\Box$ に対する基本解を以下の手順で求めよ．

(i) $D^{\mathrm{c}}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^4)\longrightarrow\mathbb{C}$ を

$$D^{\mathrm{c}}(f):=-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\frac{\hat{f}(k)}{k^2+i\varepsilon}\,dk,\quad f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^4),$$

によって定義する[16]．ただし，$k^2:=k_0^2-\boldsymbol{k}^2$ (ミンコフスキー内積) (一般的な定理により

---

[14] 9 章における自由な量子 Klein-Gordon 場の場合と同様.

[15] 付録 D の D-7-3 項を参照. 具体例については，次の問題 2 を参照.

[16] D^{c} の添字 “c” は “causal” (因果的) の意.

(付録 D の例 D-9 を参照)，$D^c \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^4)$)．このとき，$D^c$ は $\Box$ の基本解であること，すなわち，$D^c(\Box f) = \delta(f) = f(0)$ が成り立つことを示せ．

(ii)

$$D^c(f) = \frac{i}{16\pi^2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty ds\, \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{4s}}}{s^2} \int_{\mathbb{R}^4} dk\, e^{\frac{ik^2}{4s}} \hat{f}(k)$$

を示せ．

ヒント　簡単に証明できる公式

$$\frac{1}{a+i\varepsilon} = -i\int_0^\infty e^{i(a+i\varepsilon)t}\, dt = -\frac{i}{4}\int_0^\infty ds\, \frac{e^{i\frac{(a+i\varepsilon)}{4s}}}{s^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

を $a = k^2$ として適用せよ．

(iii)　ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^4)$ で働く作用素としての $\Box$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ 上で本質的に自己共役であり，

$$\mathscr{F}_4 \overline{\Box} \mathscr{F}_4^{-1} = -k^2$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\mathscr{F}_4 : L^2(\mathbb{R}_x^4) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_k^4)$ は 4 次元のフーリエ変換，$\overline{\Box}$ は $\Box$ の閉包，右辺は関数 k^2 によるかけ算作用素である．

ヒント　新井 (1997a) の定理 5.9 を応用せよ．

(iv)　(iii) を用いて，

$$\int_{\mathbb{R}^4} dk\, e^{\frac{ik^2}{4s}} \hat{f}(k) = (2\pi)^2 (e^{-i\frac{\overline{\Box}}{4s}} f)(0)$$

を示せ．

(v)　(iii) を用いて，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(e^{-it\overline{\Box}} f)(x) = \frac{1}{(4\pi|t|)^2} e^{-i\pi\varepsilon(t)/2} \int_{\mathbb{R}^4} e^{-i\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\varepsilon(t)$ は符号関数，$(x-y)^2 := (x_0 - y_0)^2 - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^2$ はミンコフスキー内積である．

ヒント　新井 (1997a) の定理 6.11 の証明と同様．

(vi)　半無限区間 $(0, \infty)$ 上の関数 g_f を

$$g_f(s) := \int_{\mathbb{R}^4} dx\, e^{-isx^2} f(x)$$

によって定義する．このとき，

$$|g_f(s)| \le \frac{1}{4s^2} \int_{\mathbb{R}^4} |\check{f}(k)|\, dk$$

を示せ．

ヒント $g_f(s)=(2\pi)^2(e^{is\overline{\Box_k}}\check{f})(0)$ と書けることに注意して ($\Box_k$ は変数 k に関するダランベールシャン), (v) を用いよ.

(vii) (ii), (iv), (v), (vi) から,

$$D^{\mathrm{c}}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty g_f(s)\,ds$$

を示せ.

(viii) (vi), (vii) から,

$$D^{\mathrm{c}}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbf{R}^4}dx\,f(x)\int_0^\infty ds\,e^{-(\varepsilon+ix^2)s}$$

を示せ.

(ix) (viii) から,

$$D^{\mathrm{c}}(x)=\frac{1}{4\pi^2 i}(x^2-i0)^{-1}$$

を結論せよ.

第 11 章

自由な Dirac 場の量子論

フェルミオンに関する相対論的量子場の基本的な例として，スピン 1/2 の自由な相対論的荷電粒子を記述する量子場 — 自由な量子 Dirac 場 — について論述する．

11-1 節　自由な Dirac 場の古典論

スピン 1/2 の相対論的荷電粒子 (電子，陽子等) を **Dirac 粒子**とよぶ．この章では，相互作用をしない，自由な Dirac 粒子を記述する場 — **自由な Dirac 場** — の量子論の数学的構成について論じる．

11-1-1　場の方程式

はじめに，4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^4$ 上の自由な Dirac 場の古典論を考察する[1]．$\mathbb{M}^4$ の計量テンソルの行列表現を

$$g = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ を 4×4 行列で，反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{11.1}$$

[1] ミンコフスキー空間については，7 章，7-4 節を参照．

をみたすものとする．ただし，γ^0 はエルミート，γ^j $(j=1,2,3)$ は反エルミートであるとする．このような行列の組 $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^4$ を**ガンマ行列**とよぶ．

ガンマ行列の具体的な表現として次のものがある：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

ただし，σ^j $(j=1,2,3)$ は **Pauli 行列**である：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0&-i \\ i&0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&-1 \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

注意 11-1　(i) 6 章，例 6-1 では，Pauli 行列の添字 $j=1,2,3$ を右下につけたが，この章では相対論的な記法にしたがいたいので，それを右上につけることにする．もちろん，これは単なる便宜上の問題である．行列 α_j についても同様．

(ii) $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3$ と 4 次の単位行列から生成される代数は，4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^4$ に同伴する Clifford 代数の表現にほかならない[2)]．

ガンマ行列が関わる理論においては，次の事実を知っておくことは重要である．

Pauli の補題　反交換関係 (11.1) をみたす 2 組の 4×4 行列 $\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3$, $\{\gamma^{\mu\prime}\}_{\mu=0}^3$ があったとせよ．このとき，正則な 4×4 行列 S が存在して，

$$\gamma^{\mu\prime} = S\gamma^\mu S^{-1}, \quad \mu = 0,1,2,3,$$

成立する (すなわち，$\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3$ と $\{\gamma^{\mu\prime}\}_{\mu=0}^3$ は相似変換で結びつく)．行列 S は，$\{\gamma^\mu\}_{\mu=0}^3$ と $\{\gamma^{\mu\prime}\}_{\mu=0}^3$ から，数因子の不定性を除いて，一意的に決定される．

この補題の証明はここではしない．たとえば，Thaller (1992) の p.74，Lemma 2.25 の証明を参照．

Pauli の補題によって，ガンマ行列に対する特定の表示を使って得られる関係式をガンマ行列の任意の表示で書き直すことが可能となる．しかし，以下では，可能な限り，ガンマ行列に対する特定の表示 — たとえば，(11.2) — を使わないで議論を進める．

ミンコフスキー空間 $\mathbb{M}^4$ の座標を $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)=(x^0,\boldsymbol{x})$ のように表し，

---

2) Clifford 代数については，たとえば，Gilbert and Murray (1991) を参照．

$$x_0 = x^0, \quad x_j = -x^j, \quad j = 1, 2, 3,$$

とする (x^0 は時間座標，$\boldsymbol{x}$ は空間座標を表す).

$\mathbb{M}^4$ 上の $\mathbb{C}^4$-値関数

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} = (\psi_r(x))_{r=1}^4$$

に対する 1 階の偏微分方程式

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - M)\,\psi(x) = 0 \tag{11.4}$$

を**自由な Dirac 方程式**という．ただし，$\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$，$M > 0$ はパラメータ，μ については 0 から 3 までの和をとるものとする (Einstein の規約)[3]．Dirac 方程式 (11.4) の解 $\psi : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ は**自由な (古典) Dirac 場**とよばれる．これは，物理的には，Dirac 粒子の古典的波動場を記述する．ただし，いまの場合，他の場との相互作用は考慮されていない．この物理的解釈では，M は Dirac 粒子の質量を表す．

11-1-2　相対論的共変性

自由な Dirac 場はある種の相対論的共変性をもつ．このことについて，簡単に見ておく．2 行 2 列の複素行列でその行列式が 1 であるものの全体を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ と記す．これは **2 次の複素特殊 1 次変換群 (complex special linear group)** とよばれる群である[4]．

一般に，ベクトル空間 $V \neq \{0\}$ 上の全単射な線形変換の全体は群をつくる．この群は，**V 上の一般 1 次変換群 (general linear group)** とよばれ，通常，$\mathrm{GL}(V)$ という記号で表される．群 G から $\mathrm{GL}(V)$ の中への写像 $\phi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ が，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，準同型性

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

---

[3] (11.4) は，光速 c を復活させた形 (MKS 単位系) では，

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\partial_0 + \sum_{j=1}^{3} i\hbar\gamma^j\partial_j - Mc\right)\psi(x) = 0$$

である．

[4] たとえば，山内-杉浦 (1960) の pp.29〜33 を参照．

をみたすとき，ϕ を G の V 上での**表現** (representation) といい，V を G の**表現空間** (representation space) とよぶ．V の次元を表現 ϕ の**次数** (degree) という．

群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の 2 次元表現をあたえるベクトル空間の要素を**スピノル** (spinor) という[5)]．

2 次の複素正方行列の全体を $M_2(\mathbb{C})$ で表す．任意の T, $S \in M_2(\mathbb{C})$ に対して，複素数 $\langle T, S\rangle$ を

$$\langle T, S\rangle := \mathrm{Tr}\,(T^* S)$$

によって定義すれば (Tr はトレースを表す)，これは $M_2(\mathbb{C})$ に内積を定め，この内積に関して，$M_2(\mathbb{C})$ は 4 次元複素ヒルベルト空間になる．このヒルベルト空間を $\hat{M}_2(\mathbb{C})$ と記す．便宜上，記号

$$\sigma^0 := I \quad (2\ \text{次の単位行列}) \tag{11.5}$$

を導入する．これと Pauli 行列 σ^j に関して，

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu \sigma^\nu) = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{11.6}$$

が成り立つ．実際，各 μ に対して，$(\sigma^\mu)^2 = 1$ であるから，$\mu = \nu$ の場合は明らか．$\mu = 0, \nu \neq 0$ の場合については，(11.3) から直接わかる．$j \neq k$ $(j, k = 1, 2, 3)$ の場合は，容易に証明される反交換関係

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{11.7}$$

により，

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma^j \sigma^k) = -\mathrm{Tr}\,(\sigma^k \sigma^j), \quad j \neq k.$$

一方，トレースの対称性により，$\mathrm{Tr}\,(\sigma^k \sigma^j) = \mathrm{Tr}\,(\sigma^j \sigma^k)$．したがって，$\mathrm{Tr}\,(\sigma^j \sigma^k) = 0$ がしたがう．

(11.6) は，$\{\sigma^\mu/\sqrt{2}\}_{\mu=0}^3$ が $\hat{M}_2(\mathbb{C})$ の正規直交基底であることを意味する．したがって，任意の $T \in M_2(\mathbb{C})$ は

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3} \mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu T)\sigma^\mu \tag{11.8}$$

と一意的に展開できる．

[5)] 厳密にいうと 4 次元ミンコフスキー空間に同伴する 2 次元スピノル．スピノルについての詳しい知識はここでは必要ないが，たとえば，Hladik (1999) に，物理との関連におけるスピノルの理論の丁寧な解説が見い出される．

2 次のエルミート行列の全体を $\mathfrak{H}(2)$ で表す．写像 $h : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathfrak{H}(2)$ を

$$h(x) := x^0\sigma^0 + \sum_{j=1}^{3} x^j\sigma^j = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{M}^4, \tag{11.9}$$

によって定義する．最右辺の行列表示から，

$$\det h(x) = x^2 = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2 \tag{11.10}$$

がわかる．

補題 11-1　写像 h は全単射である．

証明　(11.8) または (11.9) の最右辺の行列表示を用いると写像 h は単射であることがわかる．さらに，任意の $T \in \mathfrak{H}(2)$ に対して，

$$x_T^\mu := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu T), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{11.11}$$

とおけば，これは実数であり，(11.8) により，$h(x_T) = T$ が示されるから，h は全射である．□

さて，$A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を任意に固定する．このとき，各 $x \in \mathbb{M}^4$ に対して，行列 $Ah(x)A^*$ はエルミートである．したがって，h の全単射性により，

$$h(y) = Ah(x)A^* \tag{11.12}$$

をみたす $y \in \mathbb{M}^4$ がただ 1 つ存在する．ゆえに，対応：$x \longrightarrow y$ は $\mathbb{M}^4$ 上の写像を 1 つ定める．この写像を $\Lambda(A)$ と記す：$y = \Lambda(A)x$.

(11.9) と $\det A = 1$, $\det A^* = 1$ を用いると，

$$y^2 = \det h(y) = \det h(x) = x^2.$$

したがって，$\Lambda(A)$ は Lorentz 変換である．

(11.11) と (11.9) から，

$$y^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu Ah(x)A^*) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{3}\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu A\sigma^\nu A^*)x^\nu.$$

したがって，

$$\Lambda(A)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu A\sigma^\nu A^*). \tag{11.13}$$

$\mu = \nu = 0$ の場合を考えると，

$$\Lambda(A)^0{}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(AA^*) \geq 0.$$

したがって，$\Lambda(A)$ は順時的である．

(11.13) は，$\Lambda(A)$ が A の連続関数であることを意味する．そこで，(11.12) において，A を連続的に単位元 (単位行列) まで変化させると，(11.13) によって，$\Lambda(A)$ は連続的に単位元まで変化する．この事実と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の連結性 (山内-杉浦 (1960) の p.142, 例 1) によって，任意の $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して，$\det \Lambda(A) = 1$ が結論される．

以上から，$\Lambda(A)$ は固有 Lorentz 群 $\mathscr{L}_+^\uparrow$ の元である．

こうして，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から $\mathscr{L}_+^\uparrow$ への写像 $\Lambda : A \longrightarrow \Lambda(A)$ $(A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ が定義される．この写像の性質を次の補題にまとめる．

補題 11-2

(i)(全射性)　写像 Λ は上への写像である．

(ii)(準同型性)　任意の A, $B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して

$$\Lambda(AB) = \Lambda(A)\Lambda(B), \quad \Lambda(1) = 1. \tag{11.14}$$

(iii)　A, $B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ について，$\Lambda(A) = \Lambda(B)$ であるための必要十分条件は，$A = B$ または $A = -B$ が成立することである．

証明　(i) 任意の $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu A \sigma^\nu A^*) \tag{11.15}$$

をみたす $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の存在を言えばよい．すでに言及したように，$\{\sigma^\mu\}_{\mu=0}^3$ は $\hat{M}_2(\mathbb{C})$ の基底であるから，任意の $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は

$$A = \sum_{\mu=0}^{3} a_\mu \sigma^\mu \tag{11.16}$$

と一意的に展開できる．ただし，展開係数 $a_\mu \in \mathbb{C}$ は，$\det A = 1$ によって，$a_0^2 - \sum_{j=1}^{3} a_j^2 = 1$ という条件をみたさなければならない．これを (11.15) に代入すれば，

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \sum_{\lambda,\rho=0}^{3} \frac{1}{2} a_\lambda a_\rho^* \mathrm{Tr}\,(\sigma^\mu \sigma^\lambda \sigma^\nu \sigma^\rho).$$

次式によって，反対称記号 — **Levi-Cibita テンソル** — ε_{jkl} $(j,k,l = 1,2,3)$ を定義する：

$$\varepsilon_{jkl} := \begin{cases} 1 & (jkl \text{ が } 1,2,3 \text{ の偶置換のとき}) \\ -1 & (jkl \text{ が } 1,2,3 \text{ の奇置換のとき}) \\ 0 & (j,\, k,\, l \text{ のうちの 2 つが同じとき}). \end{cases} \tag{11.17}$$

反交換関係 (11.7) を用いることにより,

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^j\sigma^k\sigma^l) = i\varepsilon_{jkl}, \tag{11.18}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\sigma^j\sigma^k\sigma^l\sigma^m) = \delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{lk} - \delta_{jl}\delta_{km}, \quad j,\, k,\, l = 1,2,3. \tag{11.19}$$

が示される.

これらの式によって,

$$\Lambda^0{}_0 = |a_0|^2 - \sum_{j=1}^3 |a_j|^2, \tag{11.20a}$$

$$\Lambda^0{}_j = a_0^* a_j + a_0 a_j^* - i\sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} a_k a_l^*, \tag{11.20b}$$

$$\Lambda^0{}_j = a_0^* a_j + a_0 a_j^* + i\sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{jkl} a_k a_l^*, \tag{11.20c}$$

$$\Lambda^j{}_k = \left(|a_0|^2 - \sum_{j=1}^3 |a_j|^2\right)\delta_{jk} + 2\mathrm{Im}\, a_0^* a_l \varepsilon_{jkl} + 2\mathrm{Re}\, a_j a_k^*, \tag{11.20d}$$

が得られる．これを a_1, a_2, a_3 $(a_0 = \pm\sqrt{1+\boldsymbol{a}^2})$ についての連立方程式とみて解けば, (11.14) をみたす $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の存在が示される (一意的には決まらない).

(ii) 任意の $x \in \mathbb{M}^4$ に対して,

$$h(\Lambda(AB)x) = ABh(x)B^*A^* = Ah(\Lambda(B)x)A^* = h(\Lambda(A)\Lambda(B)x).$$

これと h の単射性により, $\Lambda(AB)x = \Lambda(A)\Lambda(B)x$．これは (11.14) の 1 番目の等式を意味する．第 2 番目の等式は自明.

(iii) $\Lambda(A) = \Lambda(B)$ ならば, すべての $x \in \mathbb{M}^4$ に対して, $Ah(x)A^* = Bh(x)B^*$．これは, $A\sigma^\mu A^* = B\sigma^\mu B^*$ $(\mu = 0,1,2,3)$ を意味する．したがって, $T = A^{-1}B$ とおくと, $T \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ であり, $T\sigma^\mu T^* = \sigma^\mu$．$\mu = 0$ の場合を考えると, T はユニタリであることがわかる．したがって, $T^* = T^{-1}$ であるから, $T\sigma^j = \sigma^j T$ $(j = 1,2,3)$．このような T は単位行列のスカラー倍 $c \in \mathbb{C}$ である．T のユニタリ性により, $c = \pm 1$ である．したがって, $A = \pm B$．逆に, $A = \pm B$ ならば, $\Lambda(A) = \Lambda(B)$

であることは明らか． □

補題 11-2 によって，各 $\Lambda \in \mathscr{L}_+^\uparrow$ に対して，SL$(2,\mathbb{C})$ の 2 つの元 $\pm A$ を対応させることができる．この 2 価写像は固有 Lorentz 群 $\mathscr{L}_+^\uparrow$ の **2 価表現**あるいは**スピノル表現**とよばれる．

各 $j=1,2,3$ に対して，エルミート行列

$$\alpha^j := \gamma^0\gamma^j, \quad j=1,2,3, \tag{11.21}$$

を導入する．(11.1) によって，

$$\{\alpha^j, \alpha^k\} = 2\delta_{jk}, \tag{11.22a}$$

$$\{\alpha^j, \gamma^0\} = 0, \quad j, k = 1,2,3, \tag{11.22b}$$

が成り立つ (問題 1)．これは，$\{\alpha^j\}_{j=1}^3$, γ^0 と 4 次の単位行列から生成される代数が 4 次元ユークリッド空間に同伴する Clifford 代数の 1 つの表現をあたえることを意味する．

行列

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{11.23}$$

はエルミートであり，

$$(\gamma^5)^2 = 1, \tag{11.24}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \tag{11.25}$$

$$[\gamma^5, \alpha^j] = 0, \quad j=1,2,3, \tag{11.26}$$

をみたす．

各 $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して，4 次の正方行列

$$S(A) := \frac{1}{2}\left\{\left(a_0 + \sum_{j=1}^3 a_j\alpha^j\right)(1+\gamma^5) + \left(a_0^* + \sum_{j=1}^3 a_j^*\alpha^j\right)(1-\gamma^5)\right\} \tag{11.27}$$

を定義する．ただし，a_μ は，A から (11.16) によって決まる数である．このとき，$S(A) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4)$ であり，

$$S(A)^{-1}\gamma^\mu S(A) = \Lambda(A)^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{11.28}$$

$$S(AB) = S(A)S(B), \quad A,\ B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \tag{11.29}$$

が成り立つ．これをガンマ行列に対する具体的な表示を用いないで証明するにはかなり

長い計算が必要である．この計算の基本となるのは，A が (11.16) であたえられるとき，

$$A^{-1} = a_0 - \sum_{j=1}^{3} a_j \sigma^j \tag{11.30}$$

が成立することである (これは簡単に証明できる：実際，(11.30) の右辺と A の積を計算すれば単位行列になる)．読者は，まず，ガンマ行列に対する特別な表示 (11.2) を用いて，(11.28), (11.29) を確かめられたい．

さて，前置きが長くなったが，任意の自由な Dirac 場についての相対論的共変性を定式化しよう．

命題 11-3　ψ を自由な Dirac 方程式 (11.4) の解とする．$A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ と $a \in \mathbb{M}^4$ を任意として，

$$\psi'(x) := S(A)\psi(\Lambda(A)^{-1}(x-a)), \quad x \in \mathbb{M}^4, \tag{11.31}$$

とおく．このとき，ψ' も自由な Dirac 方程式 (11.4) の解である．

証明　$x' = \Lambda(A)^{-1}(x-a)$ とおけば，

$$M\psi'(x) = MS(A)\psi(x') = S(A)i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\psi(x') = S(A)i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi(x')$$

$$= S(A)i\hbar\gamma^\mu \Lambda(A)^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi(x').$$

そこで，(11.28) を使うと，最後の式は，

$$i\hbar S(A)S(A)^{-1}\gamma^\nu S(A)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi(x') = i\hbar\gamma^\nu S(A)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi(x')$$
$$= i\hbar\gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\psi'(x)$$

となるので，$\psi'(x)$ は Dirac 方程式 (11.4) をみたす．□

命題 11-3 の 1 つの帰結を議論しよう．集合

$$\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow := \mathbb{M}^4 \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{(a,A) \,|\, a \in \mathbb{M}^4, A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\} \tag{11.32}$$

の任意の 2 つの元 (a,A), (b,B) に対して，積 $(a,A)(b,B)$ を

$$(a,A)(b,B) := (a + \Lambda(A)b, AB) \tag{11.33}$$

によって定義すれば，この積によって，$\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ は群になる．この群は固有 Poincaré 群 $\mathscr{P}_+^\uparrow$ の**普遍被覆群**とよばれる．

Dirac 方程式 (11.4) の解の全体を $\mathbb{S}_{\mathrm{D}}$ としよう．Dirac 方程式 (11.4) の線形性によ

り，$\mathbb{S}_{\mathrm{D}}$ はベクトル空間である．命題 11-3 によって，任意の $(a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ に対して，$\mathbb{S}_{\mathrm{D}}$ 上の線形作用素 $\pi(a, A)$ を次のように定義できる：

$$(\pi(a, A)\psi)(x) := \psi'(x) = S(A)\psi(\Lambda(A)^{-1}(x - a)). \tag{11.34}$$

これに関して，

$$\pi(0, 1) = I, \quad \pi(a, A)\pi(b, B) = \pi(a + \Lambda(A)b, AB), \quad (a, A), (b, B) \in \tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow, \tag{11.35}$$

が成り立つ．すなわち，$\{\pi(a, A) \mid (a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow\}$ は普遍被覆群 $\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ の表現である．

11-1-3 ハミルトニアンと運動量

$\mathbb{C}^4$-値関数 $\psi = (\psi_r)_{r=1}^4$ に対して，

$$\psi^* := (\psi_r^*)_{r=1}^4$$

を定義する．これを ψ の複素共役という．2 つの $\mathbb{C}^4$-値関数 $\psi = (\psi_r)_{r=1}^4$ と $\phi = (\phi_r)_{r=1}^4$ に対して，

$$\psi(x)\phi(x) := \sum_{r=1}^4 \psi_r(x)\phi_r(x)$$

とする．

Dirac 方程式 (11.4) を導くラグランジュ密度関数は

$$\mathscr{L}(x) = \bar{\psi}(x)\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - M\right)\psi(x) \tag{11.36}$$

である．ただし，

$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0 \quad (\text{横ベクトル}). \tag{11.37}$$

したがって，ψ の共役な運動量は

$$\pi_r := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_r} = i\hbar\psi_r^*, \quad r = 1, 2, 3, 4. \tag{11.38}$$

ただし，$\dot{\psi} := \partial\psi/\partial x^0$．これから，ハミルトン (エネルギー) 密度関数は

$$\mathscr{H}(x) := \sum_{r=1}^4 \pi_r(x)\dot{\psi}_r(x) - \mathscr{L}(x) = \psi^*(x)(-i\hbar\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta M)\psi(x) \tag{11.39}$$

となる．ただし，$\nabla := (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ は空間変数 $\boldsymbol{x}$ に関する勾配であり，

$$\beta := \gamma^0, \tag{11.40}$$

$$\boldsymbol{\alpha} := (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3), \tag{11.41}$$

とおいた．α^j は (11.21) で定義される行列である．したがって，ハミルトニアンは

$$H^{\mathrm{cl}}(x^0) := \int_{\mathbf{R}^3} \mathscr{H}(x)\, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbf{R}^3} \psi^*(x)(-i\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta M)\psi(x)\, d\boldsymbol{x} \tag{11.42}$$

であたえられる．ただし，$\int_{\mathbf{R}^3} |\psi_r(x)|^2\, d\boldsymbol{x} < \infty$, $\int_{\mathbf{R}^3} |\partial_j\psi_r(x)|^2\, d\boldsymbol{x} < \infty$ $(j = 1,2,3,\ r = 1,2,3,4)$ とする．

$(\gamma^0)^2 = 1$ を用いると，Dirac 方程式 (11.4) は発展方程式の形

$$i\hbar\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = (-i\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta M)\psi(t,\boldsymbol{x}) \tag{11.43}$$

に書き直せる．ここで，$t = x^0$ とおいた．

関数 ψ が自由な Dirac 場であるとき，ハミルトニアン $H^{\mathrm{cl}}(t)$ は，ψ に対する適当な条件のもとで，保存量になる．すなわち，時刻 t に依存しない (問題 2-(i))．

場の運動量 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{cl}} := (P_1^{\mathrm{cl}}, P_2^{\mathrm{cl}}, P_3^{\mathrm{cl}})$ は

$$P_j^{\mathrm{cl}} := \sum_{r=1}^{4}\int_{\mathbf{R}^3} \pi_r(t,\boldsymbol{x})\partial_j\psi_r(t,\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = i\hbar\int_{\mathbf{R}^3} \psi^*(t,\boldsymbol{x})\partial_j\psi(t,\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$
$$j = 1,2,3, \tag{11.44}$$

によって定義される．ハミルトニアンの場合と同様にして，自由な Dirac 場 ψ に対する適当な条件のもとで，各 P_j は保存量になる．(問題 2-(ii))．

11-1-4　電荷密度

(11.43) 式と $\psi^*(x)$ の $\mathbb{C}^4$ における内積をとれば，

$$i\hbar\psi(t,\boldsymbol{x})^*\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = \psi^*(t,\boldsymbol{x})(-i\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta M)\psi(t,\boldsymbol{x}).$$

この式の複素共役をとり，α^j, β がエルミート行列であることを用いると，

$$-i\hbar\psi^*(t,\boldsymbol{x})\frac{\partial\psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = i\hbar\sum_{j=1}^{3}\partial_j\psi^*(t,\boldsymbol{x})\alpha^j\psi(t,\boldsymbol{x}) + M\psi^*(t,\boldsymbol{x})\beta\psi(t,\boldsymbol{x}).$$

そこで，これら 2 つの式の辺々を引けば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})\right] + \sum_{j=1}^{3}\partial_j\left[\psi^*(t,\boldsymbol{x})\alpha^j\psi(t,\boldsymbol{x})\right] = 0 \tag{11.45}$$

が得られる．これは，$\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})$ を Dirac 粒子の物質波としての物質密度，$\psi^*(t,\boldsymbol{x})\alpha^j\psi(t,\boldsymbol{x})$ を物質流ベクトルと解釈することにより，Dirac 粒子の物質場に関

する連続の方程式とみなせる．この解釈によれば，Dirac 粒子の電荷を $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ とすれば $q\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})$ は場の電荷密度を表す．

関数 ψ が自由な Dirac 場であるとき，ψ に対する適当な条件のもとで，**全電荷**

$$Q_{\mathrm{cl}} := \int_{\mathbb{R}^3} q\psi^*(t,\boldsymbol{x})\psi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \tag{11.46}$$

は時間 t に依らず一定である (問題 3)．つまり，全電荷は時間的に保存される．

11-1-5　軌道角運動量とスピン角運動量

(11.44) により，場の運動量密度の第 j 成分は $i\hbar\psi^*(x)\partial_j\psi(x)$ である．ところで，古典力学では，位置 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ にある質点の軌道角運動量 $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3)$ は，その点での運動量を $(p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3$ とすれば，

$$l_1 = x^2p^3 - x^3p^2, \quad l_2 = x^3p^1 - x^1p^3, \quad l_3 = x^1p^2 - x^2p^1, \tag{11.47}$$

であたえられる．そこで，$p_j = -p^j$ とし，p_j を $i\hbar\psi^*(x)\partial_j\psi(x)$ で置き換えることにより得られる量

$$l_1(x) := -i\hbar\psi^*(x)(x^2\partial_3 - x^3\partial_2)\psi(x), \tag{11.48a}$$

$$l_2(x) := -i\hbar\psi^*(x)(x^3\partial_1 - x^1\partial_3)\psi(x), \tag{11.48b}$$

$$l_3(x) := -i\hbar\psi^*(x)(x^1\partial_2 - x^2\partial_1)\psi(x), \tag{11.48c}$$

を **Dirac 場** $\psi(x)$ **の軌道角運動量密度**の成分と定義するのは自然である．したがって，**Dirac 場** ψ **の全軌道角運動量**は

$$\boldsymbol{L}(t) := (L_1(t), L_2(t), L_3(t)), \tag{11.49}$$

$$L_j(t) := \int_{\mathbb{R}^3} l_j(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \quad j = 1,2,3, \tag{11.50}$$

によって定義される．

注意 11-2　Dirac 場の軌道角運動量密度 $l_j(x)$ は

$$l_j(x) = \psi(x)^*\hat{l}_j\psi(x)$$

と書けることに注意しよう．ただし，$\hat{l}_j$ は，

$$\hat{l}_1 := -i\hbar(x^2\partial_3 - x^3\partial_2),$$

$$\hat{l}_2 := -i\hbar(x^3\partial_1 - x^1\partial_3),$$

$$\hat{l}_3 := -i\hbar(x^1\partial_2 - x^2\partial_1),$$

によって定義される作用素である．これらの作用素の組 $\hat{\boldsymbol{l}} := (\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3)$ は，1 個の量子的粒子の軌道角運動量作用素を表す[6)]．

$C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ によって，$\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{C}^4$-値関数で 2 回連続微分可能なものの全体を表す．以下，この項を通して，自由な Dirac 場 ψ は次の条件をみたすとする：

(i)　$\psi \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$.

(ii)　任意の $T > 0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|t|\le T} |\boldsymbol{x}|^2 |\psi_r(t,\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|t|\le T} |\partial_j \psi_r(t,\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|t|\le T} |\partial_j \partial_k \psi_r(t,\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|t|\le T} |\boldsymbol{x}|^2 |\partial_j \psi_r(t,\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty,$$

$r = 1, 2, 3, 4, \ j, k = 1, 2, 3.$

このとき，(11.43) と部分積分を用いることにより，

$$\frac{dL_j(t)}{dt} = (-i\hbar) \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(t,\boldsymbol{x})(\alpha^k \partial_l - \alpha^l \partial_k)\psi(t,\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \tag{11.51}$$

を示すことができる (問題 4)．ただし，$(jkl) = (123), (231), (312)$ である．これから，全軌道角運動量は一般には保存しないことがわかる．

そこで，

$$\frac{dL_j(t)}{dt} + \frac{dS_j(t)}{dt} = 0 \tag{11.52}$$

となるような物質場の量 $S_j(t)$ がないかどうか調べる．もし，そのような量 $S_j(t)$ があれば，

$$J_j := L_j(t) + S_j(t) \tag{11.53}$$

は定数であるからから，J_j は保存量である．結果から述べれば，

$$s_1 := \frac{\hbar}{2} i\gamma^2\gamma^3, \quad s_2 := \frac{\hbar}{2} i\gamma^3\gamma^1, \quad s_3 := \frac{\hbar}{2} i\gamma^1\gamma^2, \tag{11.54}$$

とするとき，

$$S_j(t) := \int_{\mathbb{R}^3} \psi(t,\boldsymbol{x})^* s_j \psi(t,\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \tag{11.55}$$

[6)] 新井 (1997a) の p.192，新井-江沢 (1999b) の 3 章，3.4.4 項を参照．

が求めるものである．実際，$L_j(t)$ の場合と同様にして，(11.1) も使って計算すれば，

$$\frac{dS_j(t)}{dt} = i\hbar \int_{\mathbb{R}^3} \psi(t,\boldsymbol{x})^* (\alpha^k \partial_l - \alpha^l \partial_k) \psi(t,\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

$$(jkl) = (123),\ (231),\ (321), \tag{11.56}$$

であることがわかる (問題 5)．したがって，(11.52) が成立するので，J_j は保存量である．ベクトル

$$\boldsymbol{J} := (J_1, J_2, J_3) \tag{11.57}$$

— これを Dirac 場の**全角運動量**という — は保存される．

(11.55) から定義されるベクトル

$$\boldsymbol{S}(t) := (S_1(t), S_2(t), S_3(t)) \tag{11.58}$$

は角運動量の一種と考えられる．これをあたえる密度関数は $\psi(t,\boldsymbol{x})^* s_j \psi(t,\boldsymbol{x})$ であるが，s_j は空間座標によらない．したがって，それは内部自由度に関わる量であると解釈される．そこで，ベクトル

$$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3) \tag{11.59}$$

を **1 個の Dirac 粒子のスピン角運動量**とよび，スピン密度関数 $\psi(t,\boldsymbol{x})^* s_j \psi(t,\boldsymbol{x})$ を積分して得られる $\boldsymbol{S}(t)$ を Dirac 場の**スピン角運動量**という．

(11.1) を使うと

$$s_j^2 = \frac{\hbar^2}{4}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{11.60}$$

がわかる．これは，s_j の固有値が $\pm\hbar/2$ であることを意味する．つまり，Dirac 粒子のスピンは，$\hbar$ を単位として，1/2 である．

γ^μ が (11.2) の表示をもつ場合，

$$\boldsymbol{s} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{11.61}$$

となることがわかる．ただし，

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3). \tag{11.62}$$

11-2 節　自由な Dirac 場の平面波展開

自由な Dirac 場の一般形を求めよう．$\psi(t,\boldsymbol{x})$ を自由な Dirac 場とし，その空間変数に関する (緩増加超関数の意味での) フーリエ変換を $\hat{\psi}(t,\boldsymbol{k})$ とする：

$$\hat{\psi}(t,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}^3}\psi(t,\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3.$$

各 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$ に対して，4 行 4 列のエルミート行列

$$\hat{h}_D(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{\alpha}\cdot\hbar\boldsymbol{k} + \beta M \tag{11.63}$$

を導入する．このとき，(11.43) から，

$$i\hbar\frac{d\hat{\psi}(t,\boldsymbol{k})}{dt} = \hat{h}_D(\boldsymbol{k})\hat{\psi}(t,\boldsymbol{k}) \tag{11.64}$$

が成り立つ．これは，$\boldsymbol{k}$ を任意に固定するごとに，時間 t によらない行列を係数とする線形常微分方程式である．したがって，行列 $\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ の固有値問題が解ければ，(11.64) の一般解が求められる[7)]．そして，その一般解を逆フーリエ変換すれば，$\psi(t,\boldsymbol{x})$ の一般形が得られる．これが見通しである．

$\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}}$ 上の関数 E を

$$E(\boldsymbol{k}) := \sqrt{\hbar^2\boldsymbol{k}^2 + M^2},\quad \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3, \tag{11.65}$$

によって定義する．これは，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ の自由な Dirac 粒子のエネルギーを表す．各 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$ に対して，行列 $U_D(\boldsymbol{k})$ を

$$U_D(\boldsymbol{k}) := \frac{M + E(\boldsymbol{k}) + \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hbar\boldsymbol{k}}{\sqrt{2E(\boldsymbol{k})(M+E(\boldsymbol{k}))}} \tag{11.66}$$

によって定義する．

補題 11-4　任意の $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$U_D(\boldsymbol{k})$ はユニタリであり，

$$U_D(\boldsymbol{k})\hat{h}_D(\boldsymbol{k})U_D(\boldsymbol{k})^{-1} = \beta E(\boldsymbol{k}) \tag{11.67}$$

が成り立つ．

証明　α^j と β のエルミート性および反可換性 (11.22a), (11.22b) から，

$$U_D(\boldsymbol{k})^* = \frac{M + E(\boldsymbol{k}) - \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hbar\boldsymbol{k}}{\sqrt{2E(\boldsymbol{k})(M+E(\boldsymbol{k}))}}. \tag{11.68}$$

これから，$U_D(\boldsymbol{k})^*U_D(\boldsymbol{k}) = 1$, $U_D(\boldsymbol{k})U_D(\boldsymbol{k})^* = 1$ がわかる．したがって，$U_D(\boldsymbol{k})$ はユニタリである．これは，$U_D(\boldsymbol{k})^{-1} = U_D(\boldsymbol{k})^*$ を意味する．これを用いて直接計算

---

7) 定数行列を係数とする線形常微分方程式の解の構造に関する一般的事実の応用．

することにより，(11.67) が得られる． □

補題 11-4 により，β の固有値と固有ベクトルがわかれば，$\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ の固有値と固有ベクトルもわかる．そこで，β の固有値問題を考察する．

注意 11-3 ガンマ行列に関して具体的な表示 (11.2) を用いれば，$\beta = \gamma^0$ の固有値問題は簡単に解けている．しかし，以下では，ガンマ行列の表示によらない形で β, $\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ の固有値問題の解析を行う．

行列 β はエルミートであり，$\beta^2 = 1$, $\beta \neq \pm 1$ である．したがって，

$$\sigma(\beta) = \sigma_{\mathrm{p}}(\beta) = \{\pm 1\} \tag{11.69}$$

である．

β の固有値 ± 1 に属する固有空間を $\mathscr{U}_\pm$ とし，行列

$$\tau := \beta\alpha^1\alpha^2\alpha^3 \tag{11.70}$$

を導入する．容易にわかるように，

$$\tau^* = \tau, \quad \tau^2 = 1, \tag{11.71}$$

が成り立つ．すなわち，τ はエルミートかつユニタリである．

補題 11-5 τ は $\mathscr{U}_\pm$ から $\mathscr{U}_\mp$ へのユニタリ変換である．特に，

$$\dim \mathscr{U}_+ = \dim \mathscr{U}_- = 2. \tag{11.72}$$

証明 (11.22a), (11.22b) により，

$$\beta\tau = -\tau\beta. \tag{11.73}$$

したがって，任意の $u \in \mathscr{U}_+$ に対して，$u' := \tau u$ とおけば，$\beta u' = -u'$．したがって，$u' \in \mathscr{U}_-$．τ のユニタリ性により，$u' \neq 0$．同様に，任意の $v \in \mathscr{U}_-$ に対して，$v' = \tau^{-1}v = \tau v$ は $\mathscr{U}_+$ の元である．したがって，τ は $\mathscr{U}_+$ から $\mathscr{U}_-$ への全射である． □

補題 11-4 と補題 11-5 から，次の事実が得られる．

命題 11-6

(i) 任意の $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\sigma(\hat{h}_D(\boldsymbol{k})) = \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{h}_D(\boldsymbol{k})) = \{\pm E(\boldsymbol{k})\}.$$

(ii)　任意の $u_\pm \in \mathscr{U}_\pm \setminus \{0\}$ に対して，$U_D(\boldsymbol{k})^{-1}u_\pm$ は $\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ の固有値 $\pm E(\boldsymbol{k})$ に属する固有ベクトルである．

(iii)　$\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ の各固有値 $\pm E(\boldsymbol{k})$ の多重度は 2 である．

命題 11-6 によって，$\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ の固有値 $\pm E(\boldsymbol{k})$ に属する固有空間

$$\mathfrak{h}_\pm(\boldsymbol{k}) := \ker(\hat{h}_D(\boldsymbol{k}) \mp E(\boldsymbol{k})). \tag{11.74}$$

への正射影作用素を $P_\pm(\boldsymbol{k})$ とすれば，

$$P_+(\boldsymbol{k}) + P_-(\boldsymbol{k}) = 1, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3, \tag{11.75}$$

であり，微分方程式 (11.64) の一般解は

$$\hat{\psi}(t,\boldsymbol{k}) = e^{-iE(\boldsymbol{k})t/\hbar}P_+(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k}) + e^{iE(\boldsymbol{k})t/\hbar}P_-(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k}) \tag{11.76}$$

と表される．ここで，$\phi(\boldsymbol{k}) \in \mathbb{C}^4$ は任意でよい．したがって，自由な Dirac 場の一般形は

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{e^{-iE(\boldsymbol{k})t/\hbar + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}P_+(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k}) + e^{iE(\boldsymbol{k})t/\hbar - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}P_-(-\boldsymbol{k})\phi(-\boldsymbol{k})\Big\}\,d\boldsymbol{k} \tag{11.77}$$

であたえられる．ここで，$\phi : \mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}} \longrightarrow \mathbb{C}^4$ は

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{k}|\|\phi(\boldsymbol{k})\|_{\mathbb{C}^4}\,d\boldsymbol{k} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3}\|\phi(\boldsymbol{k})\|_{\mathbb{C}^4}\,d\boldsymbol{k} < \infty$$

をみたすような任意のボレル可測関数でよい．(11.77) の右辺における被積分関数の一部

$$\phi_{+,\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{x}) := e^{-iE(\boldsymbol{k})t/\hbar + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}P_+(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k}),$$

$$\phi_{-,\boldsymbol{k}}(t,\boldsymbol{x}) := e^{iE(\boldsymbol{k})t/\hbar - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}P_-(-\boldsymbol{k})\phi(-\boldsymbol{k}),$$

は，$\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ を任意に固定するごとに，それぞれ，自由な Dirac 方程式の解である．前者の型の解を**正エネルギーの平面波解**，後者の型の解を**負エネルギーの平面波解**という．

$\boldsymbol{s}$ を (11.59) によって定義される，Dirac 粒子のスピン角運動量として，任意の $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$s(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k} \tag{11.78}$$

を定義する．$\boldsymbol{k} \neq 0$ のとき，$s(\boldsymbol{k})/|\boldsymbol{k}|$ は，物理的には，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向へ射影されたスピン角運動量を表す．

補題 11-7　任意の $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\sigma(s(\boldsymbol{k})) = \sigma_{\mathrm{p}}(s(\boldsymbol{k})) = \left\{\pm\frac{\hbar|\boldsymbol{k}|}{2}\right\}. \tag{11.79}$$

証明　容易にわかるように，$s(\boldsymbol{k})$ はエルミートであり，

$$(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k})^2 = \frac{\hbar^2}{4}\boldsymbol{k}^2 \tag{11.80}$$

をみたす (問題 6)．したがって，$\{\pm\hbar|\boldsymbol{k}|/2\} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(s(\boldsymbol{k}))$．$\boldsymbol{k} \neq 0$ としよう．問題 7-(i) により，

$$[s(\boldsymbol{k}), \gamma^1] = 2(s_2k_2 + s_3k_3)\gamma^1, \quad [s(\boldsymbol{k}), \gamma^2] = 2(s_3k_3 + s_1k_1)\gamma^2,$$

$$[s(\boldsymbol{k}), \gamma^3] = 2(s_1k_1 + s_2k_2)\gamma^3.$$

仮に，$\sigma_{\mathrm{p}}(s(\boldsymbol{k})) = \{\hbar|\boldsymbol{k}|/2\}$ としてみよう．このとき，$s(\boldsymbol{k})$ は定数 $\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ をかける作用素 (スカラー作用素) である．したがって，上の式の左辺は 0 であるから，

$$(s_2k_2 + s_3k_3)\gamma^1 = 0, \quad (s_3k_3 + s_1k_1)\gamma^2 = 0, \quad (s_1k_1 + s_2k_2)\gamma^3 = 0.$$

これは，$s_2k_2 + s_3k_3 = 0$, $s_3k_3 + s_1k_1 = 0$, $s_1k_1 + s_2k_2 = 0$ を意味する．したがって，$s_1k_1 = s_2k_2 = s_3k_3$．ゆえに，$s_jk_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$．(11.60) により，これは，$\boldsymbol{k} = 0$ でない限り，不可能である．よって，$\sigma_{\mathrm{p}}(s(\boldsymbol{k})) \neq \{\hbar|\boldsymbol{k}|/2\}$．同様に，$\boldsymbol{k} \neq 0$ ならば $\sigma_{\mathrm{p}}(s(\boldsymbol{k})) \neq \{-\hbar|\boldsymbol{k}|/2\}$．以上から，$\boldsymbol{k} = 0$ の場合も含めて，(11.79) が成立する．
□

直接計算により，$s(\boldsymbol{k})$ は $\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ と可換なエルミート行列である (問題 7-(iii))：

$$[s(\boldsymbol{k}), \hat{h}_D(\boldsymbol{k})] = 0, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3. \tag{11.81}$$

したがって，$s(\boldsymbol{k})$ は固有空間 $\mathfrak{h}_\pm(\boldsymbol{k})$ によって簡約される．その簡約部分を $s_\pm(\boldsymbol{k})$ とする:

$$s_\pm(\boldsymbol{k}) := s(\boldsymbol{k}) \restriction \mathfrak{h}_\pm(\boldsymbol{k}). \tag{11.82}$$

補題 11-8　任意の $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(s_+(\boldsymbol{k})) = \sigma_{\mathrm{p}}(s_-(\boldsymbol{k})) = \left\{\pm\frac{\hbar|\boldsymbol{k}|}{2}\right\}. \tag{11.83}$$

証明　$[\tau, s_j] = 0$ が直接計算によりわかる．したがって，

$$[\tau, s(\boldsymbol{k})] = 0. \tag{11.84}$$

補題 11-7 によって，$s_+(\boldsymbol{k})$ は，$\pm\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ のうち少なくとも 1 つを固有値としてもつ．まず，$\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ が $s_+(\boldsymbol{k})$ の固有値の場合を考え，その固有ベクトルを $u_+(\boldsymbol{k})$ とする．このとき，(11.84) より，$\tau u_+(\boldsymbol{k})$ も $s(\boldsymbol{k})$ の固有値 $\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ に属する固有ベクトルである．一方，容易に確かめられる式

$$\tau\hat{h}_D(\boldsymbol{k}) = -\hat{h}_D(\boldsymbol{k})\tau \tag{11.85}$$

によって，$\tau u_+(\boldsymbol{k}) \in \mathfrak{h}_-(\boldsymbol{k})$．したがって，$\tau u_+(\boldsymbol{k})$ は $s_-(\boldsymbol{k})$ の固有値 $\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ に属する固有ベクトルである．同様に，$-\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ が $s_+(\boldsymbol{k})$ の固有値でその固有ベクトルを $u_-(\boldsymbol{k})$ とすれば，$\tau u_-(\boldsymbol{k})$ は $s_-(\boldsymbol{k})$ の固有値 $-\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ に属する固有ベクトルである．これらのことから，$\boldsymbol{k} \neq 0$ ならば，$s_+(\boldsymbol{k})$ は，2 つの固有値 $\pm\hbar|\boldsymbol{k}|/2$ をもつことがわかる．$s_-(\boldsymbol{k})$ についても同様． □

補題 11-8 によって，各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ と $s = \pm 1/2$ に対して，次の性質をみたすベクトル $u(\boldsymbol{k}, s) \in \mathfrak{h}_+(\boldsymbol{k})$, $v(\boldsymbol{k}, s) \in \mathfrak{h}_-(\boldsymbol{k})$ $(s = \pm 1/2)$ がとれる：

(h.1)(同時固有ベクトル性)

$$\hat{h}_D(\boldsymbol{k})u(\boldsymbol{k}, s) = E(\boldsymbol{k})u(\boldsymbol{k}, s), \quad \hat{h}_D(\boldsymbol{k})v(\boldsymbol{k}, s) = -E(\boldsymbol{k})v(\boldsymbol{k}, s),$$

$$s(\boldsymbol{k})u(\boldsymbol{k}, s) = s\hbar|\boldsymbol{k}|u(\boldsymbol{k}, s), \quad s(\boldsymbol{k})v(\boldsymbol{k}, s) = s\hbar|\boldsymbol{k}|v(\boldsymbol{k}, s).$$

(h.2)(正規直交性)

$$u(\boldsymbol{k}, s)^* u(\boldsymbol{k}, s') = \delta_{ss'} = v(\boldsymbol{k}, s)^* v(\boldsymbol{k}, s'),$$

$$u(\boldsymbol{k}, s)^* v(\boldsymbol{k}, s') = 0 = v(\boldsymbol{k}, s)^* u(\boldsymbol{k}, s'), \quad s, s' = \pm 1/2.$$

(h.3)(完全性)

$$\sum_{s=\pm 1/2} (u_r(\boldsymbol{k}, s)u_{r'}(\boldsymbol{k}, s)^* + v_r(\boldsymbol{k}, s)v_{r'}(\boldsymbol{k}, s)^*) = \delta_{rr'}, \quad r,\ r' = 1, 2, 3, 4.$$

ベクトル $u(\boldsymbol{k}, s)$, $v(\boldsymbol{k}, s)$ のラベル $s = \pm 1/2$ は，(h.1) からわかるように，$\boldsymbol{k} \neq 0$ に対して定義される行列 $s(\boldsymbol{k})/(\hbar|\boldsymbol{k}|)$ の固有値である．この行列を**ヘリシティ作用素** (helicity operator)，その固有値 $s = \pm 1/2$ を **Dirac 粒子のヘリシティ**とよぶ[8)]．これは，物理的には，運動量方向へのスピンの取り得る値を表す．

各 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\{u(\boldsymbol{k}, s)\,|\,s = \pm 1/2\}$, $\{v(\boldsymbol{k}, s)\,|\,s = \pm 1/2\}$ はそれぞれ，$\mathfrak{h}_+(\boldsymbol{k})$, $\mathfrak{h}_-(\boldsymbol{k})$ の正規直交基底であるから，任意の $z \in \mathbb{C}^4$ は

[8)] $s(\boldsymbol{k})/(\hbar|\boldsymbol{k}|)$ をヘリシティとよぶ場合もある．

$$P_+(\boldsymbol{k})z = \sum_{s=\pm 1/2} \langle u(\boldsymbol{k},s), z\rangle_{\mathbb{C}^4} u(\boldsymbol{k},s), \tag{11.86}$$

$$P_-(\boldsymbol{k})z = \sum_{s=\pm 1/2} \langle v(\boldsymbol{k},s), z\rangle_{\mathbb{C}^4} v(\boldsymbol{k},s), \tag{11.87}$$

と展開でき，ベクトルの組 $\{u(\boldsymbol{k},s), v(\boldsymbol{k},s) \mid s = \pm 1/2\}$ は $\mathbb{C}^4$ の正規直交基底である．この基底に関する，$P_\pm(\boldsymbol{k})$ の行列表示を

$$P_\pm(\boldsymbol{k}) = (P_\pm(\boldsymbol{k})_{rr'})_{r,r'=1,2,3,4} \tag{11.88}$$

とすれば，

$$P_+(\boldsymbol{k})_{rr'} = \sum_{s=\pm 1/2} u_r(\boldsymbol{k},s) u_{r'}(\boldsymbol{k},s)^*, \tag{11.89}$$

$$P_-(\boldsymbol{k})_{rr'} = \sum_{s=\pm 1/2} v_r(\boldsymbol{k},s) v_{r'}(\boldsymbol{k},s)^*, \tag{11.90}$$

が成り立つ．

(11.86), (11.87) を用いて，(11.77) における $P_\pm(\boldsymbol{k})\phi(\boldsymbol{k})$ を $u(\boldsymbol{k},s)$, $v(\boldsymbol{k},s)$ で表し ($z = \phi(\boldsymbol{k})$ として応用)，その展開係数 $\langle u(\boldsymbol{k},s), \phi(\boldsymbol{k})\rangle_{\mathbb{C}^4}$, $\langle v(\boldsymbol{k},s), \phi(\boldsymbol{k})\rangle_{\mathbb{C}^4}$ をそれぞれ改めて，$B_+(\boldsymbol{k},s)$, $B_-(\boldsymbol{k},s)$ とすれば，

$$\psi_{\mathrm{cl}}(t,\boldsymbol{x}) := \sum_{s=\pm 1/2} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ B_+(\boldsymbol{k},s) u(\boldsymbol{k},s) e^{-iE(\boldsymbol{k})t/\hbar + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right.$$
$$\left. + B_-(-\boldsymbol{k},s) v(-\boldsymbol{k},s) e^{iE(\boldsymbol{k})t/\hbar - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right\} d\boldsymbol{k} \tag{11.91}$$

によって定義される関数 ψ_{cl} は自由な古典 Dirac 場である．ただし，$B_\pm(\boldsymbol{k},s)$ は

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{k}| \|B_\pm(\boldsymbol{k},s))\|_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \|B_\pm(\boldsymbol{k},s)\|_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k} < \infty, \ s = \pm 1/2,$$

をみたすような任意のボレル可測関数でよい．

11-3 節　量子 Dirac 場の構成

11-3-1　形式的 (発見法的) 議論

量子化された自由な Dirac 場 — 自由な量子 Dirac 場 — は，作用素値超関数の組 $\psi(t,\boldsymbol{x}) = (\psi_r(t,\boldsymbol{x}))_{r=1}^4$ で次の性質をもつものとして定義される：

(D.1)　作用素値超関数の意味で Dirac 方程式 (11.4) または (11.43) をみたす．すなわち，任意の $G \in \overset{4}{\oplus} \mathscr{S}(\mathbb{R}^4_x)$, $F \in \overset{4}{\oplus} \mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}})$ に対して，

$$\psi((-i\hbar\, {}^T\gamma^\mu \partial_\mu - M)G) = 0 \tag{11.92}$$

または

$$i\hbar \frac{d\psi(t,F)}{dt} = \psi\left(t, \left(\sum_{j=1}^{3} i\hbar\, {}^T\alpha^j \partial_j + {}^T\beta M\right) F\right) \tag{11.93}$$

がそれぞれ，ある稠密な部分空間で成立する．ここで，${}^TA$ は行列 A の転置行列を表し，

$$\psi(G) := \sum_{r=1}^{4} \psi_r(G_r), \quad G = (G_r)_{r=1}^4 \in \bigoplus^4 \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4),$$

$$\psi(t,F) := \sum_{r=1}^{4} \psi_r(t,F_r), \quad F = (F_r)_{r=1}^4 \in \bigoplus^3 \mathscr{S}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^4).$$

(D.2)　$\pi_r := i\hbar\psi_r^*$ ((11.38) を参照) とするとき，同時刻 t で正準反交換関係

$$\{\psi_r(t,\boldsymbol{x}), \pi_{r'}(t,\boldsymbol{x}')\} = i\hbar\delta_{rr'}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{11.94a}$$

$$\{\psi_r(t,\boldsymbol{x}), \psi_{r'}(t,\boldsymbol{x}')\} = 0, \{\pi_r(t,\boldsymbol{x}), \pi_{r'}(t,\boldsymbol{x}')\} = 0, \tag{11.94b}$$

をみたす．

このような作用素値超関数を形式的につくるには，古典的な自由な Dirac 場の平面波展開 (11.91) における係数 $B_+(\boldsymbol{k},s)$, $B_-(-\boldsymbol{k},s)$ をそれぞれ，次の反交換関係にしたがう作用素値超関数 $b(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$ で置き換えればよい：

$$\{b(\boldsymbol{k},s), b(\boldsymbol{k}',s')^*\} = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{11.95a}$$

$$\{d(\boldsymbol{k},s), d(\boldsymbol{k}',s')^*\} = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \tag{11.95b}$$

$$\{b(\boldsymbol{k},s), b(\boldsymbol{k}',s')\} = \{d(\boldsymbol{k},s), d(\boldsymbol{k}',s')\} = 0, \tag{11.95c}$$

$$\{b(\boldsymbol{k},s), d(\boldsymbol{k}',s')\} = \{b(\boldsymbol{k},s), d(\boldsymbol{k}',s')^*\} = 0. \tag{11.95d}$$

実際，このような作用素値超関数を用いて，形式的作用素値超関数

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) := \sum_{s=\pm 1/2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \Big\{ b(\boldsymbol{k},s) u(\boldsymbol{k},s) e^{-iE(\boldsymbol{k})t/\hbar + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + d(\boldsymbol{k},s)^* v(-\boldsymbol{k},s) e^{iE(\boldsymbol{k})t/\hbar - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \Big\} d\boldsymbol{k} \tag{11.96}$$

をつくれば，これが，形式的に上記の性質 (D.1), (D.2) を満足することは容易に確かめられる．

そこで，問題は (11.95a)〜(11.95d) をみたす作用素値超関数 $b(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$ の存在を示すことである．次の項でこれを行う．

11-3-2　厳密な構成

5 章で展開したフェルミオンフォック空間の理論を応用する．ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}};\mathbb{C}^4)$ 上のフェルミオンフォック空間を単に $\mathscr{F}_{\rm f}$ と書く：

$$\mathscr{F}_{\rm f}=\mathscr{F}_{\rm f}(L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}};\mathbb{C}^4)). \tag{11.97}$$

$L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}};\mathbb{C}^4)$ の元 F を $F=(F_1,F_2,F_3,F_4)$ と記す $(F_r\in L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}}),\ r=1,2,3,4)$. 任意の $f\in L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}})$ に対して，$\mathscr{F}_{\rm f}$ 上の有界作用素 $b(f,s)$, $d(f,s)$ $(s=\pm1/2)$ を次のように定義する：

$$b(f,1/2)=B(f,0,0,0),\quad b(f,-1/2)=B(0,f,0,0), \tag{11.98}$$

$$d(f,1/2)=B(0,0,f,0),\quad d(f,-1/2)=B(0,0,0,f). \tag{11.99}$$

ただし，$B(\cdot)$ は $\mathscr{F}_{\rm f}$ 上の消滅作用素である．このとき，$B(\cdot),B(\cdot)^*$ の正準反交換関係 (定理 5-2) によって，任意の f, $g\in L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}})$ に対して，

$$\{b(f,s),b(g,s')^*\}=\delta_{ss'}\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{11.100a}$$

$$\{d(f,s),d(g,s')^*\}=\delta_{ss'}\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{11.100b}$$

$$\{b(f,s),b(g,s')\}=\{d(f,s),d(g,s')\}=0, \tag{11.100c}$$

$$\{b(f,s),d(g,s')\}=\{b(f,s),d(g,s')^*\}=0, \tag{11.100d}$$

が成立する．定理 5-2 によって，

$$\|b(f,s)^\sharp\|=\|d(f,s)^\sharp\|=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)},\quad f\in L^2(\mathbb{R}^3). \tag{11.101}$$

したがって，対応 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}})\ni f\longrightarrow b(f,s)^\sharp$ $(d(f,s)^\sharp)$ は，作用素ノルムの位相で，作用素値超関数である．そこで，

$$b(f,s)=\int_{\mathbb{R}^3}b(\boldsymbol{k},s)f(\boldsymbol{k})^*d\boldsymbol{k},\quad d(f,s)=\int_{\mathbb{R}^3}d(\boldsymbol{k},s)f(\boldsymbol{k})^*d\boldsymbol{k}, \tag{11.102}$$

として，作用素値超関数核 $b(\boldsymbol{k},s)$, $d(\boldsymbol{k},s)$ を導入すれば，これらは，(11.95a)〜(11.95d) をみたすことがわかる．

ここで，ヘリシテイ s を固定するごとに，2 種類の生成・消滅作用素 $b(\cdot,s)^\sharp$, $d(\cdot,s)^\sharp$ が現われていることに注意しよう．物理的に言うと，$b(\cdot,s)^*$ はヘリシティ s の Dirac

粒子の生成作用素であり，$d(\cdot,s)^*$ はヘリシティ s の反 Dirac 粒子の生成作用素である[9]．これと対応して，$b(\cdot,s)$ はヘリシティ s の Dirac 粒子の消滅作用素，$d(\cdot,s)$ はヘリシティ s の反 Dirac 粒子の消滅作用素を表す．

時刻 t の自由な量子 Dirac 場は，作用素値汎関数 $\overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}}) \ni F \longrightarrow \psi(t,F)$ として，(11.96) を F で均したもので定義される：

$$\psi(t,F) := \sum_{s=\pm 1/2}\left\{b(u(\cdot,s)^*\hat{F}^* e^{iEt/\hbar}, s) + d(\tilde{v}(\cdot,s)\hat{F}e^{iEt/\hbar}, s)^*\right\}. \quad (11.103)$$

ただし，$\tilde{v}(\boldsymbol{k},s) := v(-\boldsymbol{k},s)$, $u(\cdot,s)^*\hat{F}^* := \sum_{r=1}^{4} u_r(\cdot,s)^*\hat{F}_r^*$ ($\tilde{v}(\cdot,s)\hat{F}$ についても同様)．任意の $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}})$ と $r = 1,2,3,4$ に対して，

$$\psi_r(t,f) := \sum_{s=\pm 1/2}\{b(u_r(\cdot,s)^*\hat{f}^* e^{iEt/\hbar}, s) + d(\tilde{v}_r(\cdot,s)\hat{f}e^{iEt/\hbar}, s)^*\} \quad (11.104)$$

とおけば，

$$\psi(t,F) = \sum_{r=1}^{4}\psi_r(t,F_r). \quad (11.105)$$

次の事実を証明するのは容易である．

定理 11-9　作用素値汎関数 $\psi(t,F)$ は，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}$ 上で自由な Dirac 方程式 (11.93) をみたす．

11-3-3　反交換関係

(11.100a)〜(11.100d) と (11.86), (11.87) によって，任意の $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}})$ と $r, r' = 1,2,3,4$, $t, t' \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\{\psi_r(t,f), \psi_{r'}(t',g)^*\}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3}\left\{P_+(\boldsymbol{k})_{rr'}e^{-iE(\boldsymbol{k})(t-t')/\hbar} + P_-(\boldsymbol{k})_{rr'}e^{iE(\boldsymbol{k})(t-t')/\hbar}\right\}\hat{f}(-\boldsymbol{k})\hat{g}(-k)^*d\boldsymbol{k}, \quad (11.106a)$$

$$\{\psi_r(t,f), \psi_{r'}(t',g)\} = 0, \quad (11.106b)$$

が成り立つ．特に，$t = t'$ とすれば，(11.75) を用いることにより，

$$\{\psi_r(t,f), \psi_{r'}(t,g)^*\} = \delta_{rr'}\langle g, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad (11.107)$$

---

[9] 素粒子の反粒子については，9 章，9-9 節，9-9-1 項の脚注を参照．

が得られる．したがって，時刻 t の場の集合

$$\{\psi_r(t,f), \psi_{r'}(t,g)^* \mid r,\, r' = 1,2,3,4,\ f,\, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}})\} \tag{11.108}$$

は正準反交換関係にしたがう．

各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，作用素値超関数 $\psi(t,\cdot) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}}) \ni f \longrightarrow \psi(t,f)$ の超関数核を $\psi(t,\boldsymbol{x}) = \psi(x)$ $(x = (x_0, \boldsymbol{x}),\ x_0 = t)$ で表す．このとき，(11.106a) は，超関数核の言葉では，

$$\{\psi_r(x), \psi_{r'}(y)^*\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} P_+(\boldsymbol{k})_{rr'} e^{-ik(x-y)}\, d\boldsymbol{k}$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} P_-(\boldsymbol{k})_{rr'} e^{ik(x-y)}\, d\boldsymbol{k}, \quad r,\, r' = 1,2,3,4, \tag{11.109}$$

と書かれる．ただし，$k_0 := E(\boldsymbol{k})/\hbar$, $k(x-y) := k_0(x_0 - y_0) - \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ はミンコフスキー内積である．

(11.109) の右辺をもう少し詳しく見るために，次の事実に注意する：

補題 11-10　すべての $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$P_+(\boldsymbol{k}) = \frac{(M + \hbar\gamma^\mu k_\mu)\gamma^0}{2E(\boldsymbol{k})}, \tag{11.110}$$

$$P_-(\boldsymbol{k}) = -\frac{\gamma^0(M - \hbar\gamma^\mu k_\mu)}{2E(\boldsymbol{k})}. \tag{11.111}$$

ただし，$k_0 := E(\boldsymbol{k})/\hbar$ であり，$\boldsymbol{k} = (k^1, k^2, k^3)$ とするとき，$k_j := -k^j$ $(j = 1,2,3)$ である．

証明　(11.110) の右辺の行列を $T(\boldsymbol{k})$ とすれば，$T(\boldsymbol{k})$ はエルミートである．前節の (h.1) の第 1 式，第 2 式を用いることにより，

$$T(\boldsymbol{k})u(\boldsymbol{k},s) = u(\boldsymbol{k},s), \quad T(\boldsymbol{k})v(\boldsymbol{k},s) = 0$$

を示すことができる．したがって，$T(\boldsymbol{k}) = P_+(\boldsymbol{k})$．(11.111) についても同様．□

(11.110), (11.111) を (11.109) に代入し，簡単な恒等式

$$\gamma^\mu k_\mu e^{-ikx} = i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-ikx} \tag{11.112}$$

を用いると

$$\{\psi_r(x), \psi_{r'}(y)^*\} = i\left[\left(\frac{M}{\hbar} + i\gamma^\mu\partial^x_\mu\right)\gamma^0\right]_{rr'} \Delta(x-y;M) \tag{11.113}$$

が得られる．ただし，$\Delta(x;M)$ は 9 章，9-6 節で導入した Pauli-Jordan 関数で $d=3$, $m=M/\hbar$ の場合のものであり，∂_μ^x は変数 x^μ に関する偏微分作用素を表す．

任意の $f=(f_r)_{r=1}^4 \in \overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4)$ に対して，$\psi(f)$ を

$$\psi(f) := \sum_{s=\pm 1/2}\{b(u(\cdot,s)^*\mathscr{F}_E f^*, s) + d(\tilde{v}(\cdot,s)\mathscr{F}_E f, s)^*\} \tag{11.114}$$

によって定義する．ただし，

$$\mathscr{F}_E f_r(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{\mathbb{R}^4} e^{iE(\boldsymbol{k})t/\hbar - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} f_r(t,\boldsymbol{x})\,dtd\boldsymbol{x}. \tag{11.115}$$

これを**全時空で均された，自由な量子 Dirac 場**とよぶ．容易にわかるように，すべての $F\in\overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^3)$, $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$\psi(g\times F) = \int_{\mathbb{R}} dt\, g(t)\psi(t,F) \tag{11.116}$$

が成り立つ．

(11.113) と (9.87) により，次の結果が得られる．

定理 11-11　(微視的因果律)　r, $r'=1,2,3,4$ に対して，f_r, $g_{r'}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4)$ とし，$\mathrm{supp}\, f_r$ と $\mathrm{supp}\, g_{r'}$ が空間的に離れているならば，$\{\psi(f_r),\psi(g_{r'})^*\}=0$.

11-3-4　真空期待値

フェルミオンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}$ におけるフォック真空を Φ_0 とする．任意の $f_j\in L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^3)$ と $s_j=\pm 1/2$ ($j=1,\cdots,n$, $n\in\mathbb{N}$) に対して，ベクトル $b(f_1,s_1)^*\cdots b(f_n,s_n)^*\Phi_0$ は，n 個の Dirac 粒子が存在する状態を表し，$d(f_1,s_1)^*\cdots d(f_n,s_n)^*\Phi_0$ は，n 個の反 Dirac 粒子が存在する状態を表す (物理的解釈).

(11.104) と

$$b(f,s)\Phi_0=0,\quad d(f,s)\Phi_0=0,\quad s=\pm 1/2,\ f\in L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^3), \tag{11.117}$$

を用いると，超関数の意味で，

$$\langle\Phi_0,\psi_r(x)\bar{\psi}_{r'}(y)\Phi_0\rangle = i\left(\frac{M}{\hbar}+i\gamma^\mu\partial_\mu^x\right)_{rr'}\Delta_+(x-y;M), \tag{11.118}$$

$$\langle\Phi_0,\bar{\psi}_{r'}(y)\psi_r(x)\Phi_0\rangle = i\left(\frac{M}{\hbar}+i\gamma^\mu\partial_\mu^x\right)_{rr'}\Delta_-(x-y;M), \tag{11.119}$$

(r, $r'=1,2,3,4$) を得る．ただし，$\bar{\psi}$ は (11.37) で定義される量子場であり，$\Delta_+(x;M)$ は，$d=3, m=M/\hbar$ の場合の $\Delta_+(x)$ (9-6 節を参照) である．また，$\Delta_-(x;M):=$

$-\Delta_+(-x; M)$.

3 個以上の場の積の真空期待値も反交換関係 (11.100a)∼(11.100d) を用いることにより，計算される．

11-3-5 Feynman の伝播関数

超関数

$$S_{\mathrm{F}}(x,y)_{rr'} := -i\theta(x^0 - y^0)\langle \Phi_0, \psi_r(x)\bar{\psi}_{r'}(y)\Phi_0\rangle$$
$$+ i\theta(y^0 - x^0)\langle \Phi_0, \bar{\psi}_{r'}(y)\psi_r(x)\Phi_0\rangle \tag{11.120}$$

を自由な量子 Dirac 場に対する **Feynman の伝播関数**とよぶ．(11.118) と (11.119) および (9.72) を用いると

$$S_{\mathrm{F}}(x,y)_{rr'} = \left(i\gamma^\mu \partial_\mu^x + \frac{M}{\hbar}\right)_{rr'} \Delta_{\mathrm{F}}(x-y; M) \tag{11.121}$$

が得られる．ただし，$\Delta_{\mathrm{F}}(x;M)$ は，$d=3$, $m=M/\hbar$ の場合の $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ (9-6 節を参照) である．簡単にわかる関係式

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu^x - \frac{M}{\hbar}\right)\left(i\gamma^\mu \partial_\mu^x + \frac{M}{\hbar}\right) = -\Box - \left(\frac{M}{\hbar}\right)^2 \tag{11.122}$$

に注意し (問題 9 を参照)，(9.79) を用いると，$S_{\mathrm{F}}(x,y)$ は

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu^x - \frac{M}{\hbar}\right) S_{\mathrm{F}}(x,y) = \delta(x-y) \tag{11.123}$$

をみたすことがわかる．すなわち，$S_{\mathrm{F}}(x,y)/\hbar$ は Dirac 方程式 (11.4) の基本解 (Green 関数) である．

11-4 節　量子場のハミルトニアン，運動量作用素，全電荷作用素

11-4-1 量子場のハミルトニアンと運動量作用素

関数 $E(\boldsymbol{k})$ による，$L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}})$ 上のかけ算作用素を E で表し，$\overset{4}{\oplus} E$ をヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}}; \mathbb{C}^4) = \overset{4}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{k}})$ で働く直和作用素とする：

$$D\left(\overset{4}{\oplus} E\right) := \overset{4}{\oplus} D(E), \tag{11.124a}$$

$$\left(\overset{4}{\oplus} E\right) F := (EF_r)_{r=1}^4, \quad F = (F_r)_{r=1}^4,\ F_r \in D(E),\ r = 1,2,3,4. \tag{11.124b}$$

この作用素に対する，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}$ における第 2 量子化作用素を H_{D} とする：

$$H_{\mathrm{D}} := d\Gamma_{\mathrm{f}}\left(\overset{4}{\oplus} E\right). \tag{11.125}$$

これは非負の自己共役作用素である．

定理 5-10 と (11.103) により，

$$\psi(t,F) = e^{itH_{\mathrm{D}}/\hbar}\psi(0,F)e^{-itH_{\mathrm{D}}/\hbar}, \quad F \in \overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}}),\ t \in \mathbb{R}, \tag{11.126}$$

が成り立つ．したがって，H_{D} は量子場 $\psi(t,F)$ に対するハミルトニアンであると解釈される．H_{D} を**自由な量子 Dirac 場のハミルトニアン**という．

$L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ における，変数 k_j によるかけ算作用素の第 2 量子化

$$P_j^{\mathrm{D}} := d\Gamma_{\mathrm{f}}(\hbar k_j) \tag{11.127}$$

は自己共役である．$\boldsymbol{P}^{\mathrm{D}} := (P_1^{\mathrm{D}}, P_2^{\mathrm{D}}, P_3^{\mathrm{D}})$．これに関して，

$$\psi(t,F_{\boldsymbol{a}}) = e^{i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}^{\mathrm{D}}}/\hbar}\psi(t,F)e^{-i\overline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P}^{\mathrm{D}}}/\hbar}, \quad F \in \overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}^3_{\boldsymbol{x}}), \quad t \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \tag{11.128}$$

を示すのは容易である ($\boldsymbol{k} = (k^1,k^2,k^3)$ ($k_j = -k^j$, $j = 1,2,3$) に注意)．したがって，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{D}}$ は自由な量子 Dirac 場の運動量作用素であると解釈される．

注意 11-4　自由な量子 Dirac 場の象徴的表示 (11.96) を古典的なハミルトニアン H^{cl} (11.42) に形式的に代入したものを H^{formal} — 自由な量子 Dirac 場の形式的ハミルトニアン — とすれば，

$$H^{\mathrm{formal}} = \sum_{s=\pm 1/2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})\{b(\boldsymbol{k},s)^* b(\boldsymbol{k},s) - d(\boldsymbol{k},s)d(\boldsymbol{k},s)^*\}$$

となることがわかる．ただし，生成・消滅作用素の順序は変えないで計算を行う．そこで，$d(\boldsymbol{k},s)$ についての正準反交換関係 (11.95b) を用いると，

$$H^{\mathrm{formal}} = \sum_{s=\pm 1/2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})\{b(\boldsymbol{k},s)^* b(\boldsymbol{k},s) + d(\boldsymbol{k},s)^* d(\boldsymbol{k},s)\}$$
$$- 2\delta(0)\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})$$

となる．最後の発散項を捨てて得られるのが上記の自由ハミルトニアン H_{D} にほかならない：

$$H_{\mathrm{D}} = \sum_{s=\pm 1/2}\int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})\{b(\boldsymbol{k},s)^* b(\boldsymbol{k},s) + d(\boldsymbol{k},s)^* d(\boldsymbol{k},s)\}$$

(象徴的表示)．これを座標空間での場 $\psi(x)$ を使って書けば，形式的に

$$H_{\mathrm{D}} = \int_{\mathbb{R}^3} :\psi(x)^*(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta M)\psi(x): \, d\boldsymbol{x}$$

となっている．すなわち，フェルミオンの場合も，もともとの形式的なハミルトニアンにおいて発散部分を取り除くことは Wick 積をとることに相当する．ただし，フェルミオンの場合の Wick 積には符号がつく．たとえば，

$$:b(\boldsymbol{k}_1, s_1)b(\boldsymbol{k}_2, s_2)^*: = -b(\boldsymbol{k}_1, s_1)^* b(\boldsymbol{k}_2, s_2),$$

$$:d(\boldsymbol{k}_1, s_1)d(\boldsymbol{k}_2, s_2)^*: = -d(\boldsymbol{k}_1, s_1)^* d(\boldsymbol{k}_2, s_2).$$

いまの形式的な議論で，もし，$d(\boldsymbol{k}, s)$, $d(\boldsymbol{k}', s')^*$ が正準交換関係 $[d(\boldsymbol{k}, s), d(\boldsymbol{k}', s')^*] = \delta_{ss'}\delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ にしたがうとすると，形式的ハミルトニアンは，発散項を落としたあとで，

$$H'_{\mathrm{formal}} = \sum_{s=\pm 1/2} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}\, E(\boldsymbol{k})\{b(\boldsymbol{k}, s)^* b(\boldsymbol{k}, s) - d(\boldsymbol{k}, s)^* d(\boldsymbol{k}, s)\}$$

となる．だが，この場合，第 2 項から定まる作用素 $-\int_{\mathbb{R}^3} E(\boldsymbol{k})\, d(\boldsymbol{k}, s)^* d(\boldsymbol{k}, s)\, d\boldsymbol{k}$ は非正の作用素で下に有界でない．したがって，H'_{formal} は上にも下にも有界でなくなる．これは，Dirac 方程式の負エネルギー解の存在と対応するものである．反粒子の生成・消滅作用素 $d(\boldsymbol{k}, s)^*$, $d(\boldsymbol{k}', s')$ に対して正準反交換関係を要請することにより，負エネルギー解の困難が解消され，古典論からの対応で定義される，量子場のハミルトニアンは下に有界 (非負) となる．

11-4-2　全電荷作用素

(11.46) の右辺の $\psi(x)$ を量子化された自由な Dirac 場 (11.96) で置き換えて得られる形式的な作用素を Q^{formal} とすれば，

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{formal}} &= q \sum_{s=\pm 1/2} \int_{\mathbb{R}^3} (b(\boldsymbol{k}, s)^* b(\boldsymbol{k}, s) + d(\boldsymbol{k}, s) d(\boldsymbol{k}, s)^*)\, d\boldsymbol{k} \\ &= q \sum_{s=\pm 1/2} \int_{\mathbb{R}^3} (b(\boldsymbol{k}, s)^* b(\boldsymbol{k}, s) - d(\boldsymbol{k}, s)^* d(\boldsymbol{k}, s))\, d\boldsymbol{k} + 2\delta(0) q \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

右辺の発散項を捨てたものは，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}$ 上できちんと定義される作用素をあたえる．実際，$L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ 上の作用素 $I_\pm$ を

$$I_+(f_1, f_2, f_3, f_4) = (f_1, f_2, 0, 0), \quad I_-(f_1, f_2, f_3, f_4) = (0, 0, f_3, f_4), \quad (11.129)$$

によって定義し，

$$N_+ = d\Gamma_{\mathrm{f}}(I_+), \quad N_- = d\Gamma_{\mathrm{f}}(I_-) \tag{11.130}$$

とすれば，記号的に

$$N_+ = \sum_{s=\pm 1/2} \int_{\mathbb{R}^3} b(\boldsymbol{k}, s)^* b(\boldsymbol{k}, s)\, d\boldsymbol{k}, \quad N_- = \sum_{s=\pm 1/2} \int_{\mathbb{R}^3} d(\boldsymbol{k}, s)^* d(\boldsymbol{k}, s)\, d\boldsymbol{k}, \tag{11.131}$$

と表示される．そこで，量子化された自由な Dirac 場の全電荷を

$$Q := q(N_+ - N_-) \tag{11.132}$$

によって定義する．上の計算から，象徴的に

$$Q = q \int_{\mathbb{R}^3} :\psi(x)^* \psi(x):\, d\boldsymbol{x}$$

と書くことができる．

N_+, N_- は，それぞれ，物理的には，Dirac 粒子，反 Dirac 粒子の全個数を記述する作用素である．この解釈と (11.132) が矛盾しないためには，Dirac 粒子と反 Dirac 粒子の電荷の符号は反対でなければならないことが結論される．

11-5 節　量子 Dirac 場の Poincaré 共変性

この節では，自由な量子 Dirac 場の相対論的共変性を証明する．これは次の定理の形に表現される．

定理 11-12　$\mathscr{F}_f$ 上において，$\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ のユニタリ表現 $\{U(a, A) \mid (a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow\}$ が存在して，すべての $f \in \overset{4}{\oplus} \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4)$, $(a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ に対して，

$$U(a, A)\Phi_0 = \Phi_0 \tag{11.133a}$$

かつ

$$U(a, A)\psi(f)U(a, A)^{-1} = \psi({}^T S(A^{-1}) f_{(a, \Lambda(A))}) \tag{11.133b}$$

が成り立つ．ここで，${}^T S(A^{-1})$ は行列 $S(A^{-1})$ の転置行列を表し，

$$f_{(a,\Lambda(A))} := \left((f_r)_{(a,\Lambda(A))}\right)_{r=1}^4 .$$

この定理の証明は，(11.133a), (11.133b) をみたすユニタリ表現 $\{U(a, A) \mid (a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow\}$ を実際に具体的に構成することによって遂行される (以下の (11.145))．まず，こ

の構成の発見法的アイディアを述べよう．

$f \in \overset{4}{\oplus} \mathscr{S}(\mathbb{R}^4_x)$ とする．(11.114) と $b^\sharp(\cdot)$, $d^\sharp(\cdot)$ の定義から，

$$\psi(f) = B(J(f^*)) + B(K(f))^* \tag{11.134}$$

と書ける．ただし，

$$J(f) := (u(\cdot, 1/2)^* \mathscr{F}_E f, u(\cdot, -1/2)^* \mathscr{F}_E f, 0, 0)\,, \tag{11.135}$$

$$K(f) := (0, 0, \tilde{v}(\cdot, 1/2) \mathscr{F}_E f, \tilde{v}(\cdot, -1/2) \mathscr{F}_E f)\,. \tag{11.136}$$

したがって，また，

$$\begin{aligned} &\psi({}^T S(A^{-1}) f_{(a,\Lambda(A))}) \\ &= B(J(S(A^{-1})^* f^*_{(a,\Lambda(A))})) + B(K({}^T S(A^{-1}) f_{(a,\Lambda(A))}))^*. \end{aligned}$$

そこで，次の事実に注意する．

補題 11-13 $\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，$\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ を $\mathscr{K}$ 上のフェルミオンフォック空間，W を $\mathscr{K}$ 上のユニタリ作用素とする．このとき，任意の $u \in \mathscr{K}$ に対して，

$$\Gamma_{\mathrm{f}}(W) B(u)^\sharp \Gamma_{\mathrm{f}}(W)^{-1} = B(Wu)^\sharp$$

が成り立つ．ただし，$\Gamma_{\mathrm{f}}(\cdot)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{f}}(\mathscr{K})$ 上の第 2 種の第 2 量子化作用素を表す．

証明 定理 5-10 の証明と同様． □

以上の事実を考慮すると，任意の $f, g \in \overset{4}{\oplus} \mathscr{S}(\mathbb{R}^4_x)$, $(a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}^\uparrow_+$ に対して，

$$Y(a, A) J(g) = J(S(A^{-1})^* g_{(a,\Lambda(A))}), \tag{11.137a}$$

$$Y(a, A) K(f) = K({}^T S(A^{-1}) f_{(a,\Lambda(A))}), \tag{11.137b}$$

をみたす，ユニタリ作用素 $Y(a, A) : L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}; \mathbb{C}^4) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}; \mathbb{C}^4)$ で $\tilde{\mathscr{P}}^\uparrow_+$ のユニタリ表現となっているものが存在すれば，$U(a, A) = \Gamma_{\mathrm{f}}(Y(a, A))$ が求めるものになる．そこで，問題は，$\tilde{\mathscr{P}}^\uparrow_+$ の，$L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}; \mathbb{C}^4)$ 上でのユニタリ表現 $\{Y(a, A) \,|\, (a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}^\uparrow_+\}$ で (11.137a), (11.137b) をみたすものの存在を示すことである．以下でこれを行う．

集合

$$D_0 := \{J(g) + K(f) \,|\, f, g \in \overset{4}{\oplus} \mathscr{S}(\mathbb{R}^4_x)\} \tag{11.138}$$

が $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}; \mathbb{C}^4)$ の部分空間であることは容易にわかる．

補題 11-14　D_0 は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}};\mathbb{C}^4)$ で稠密である．

証明　$G=(G_r)_{r=1}^4 \in D_0^{\perp}$ としよう．したがって，すべての $f, g \in \overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4)$ に対して，$\langle G,[J(g)+K(f)]\rangle = 0$. 特に，$f=0$, $g=0$ の場合をそれぞれ考えることにより，$\langle G,J(g)\rangle = 0$, $\langle G,K(f)\rangle = 0$. そこで，

$$w_r^{(+)} := G_1 u_r(\cdot,1/2) + G_2 u_r(\cdot,-1/2),$$

$$w_r^{(-)} := G_3 \tilde{v}(\cdot,1/2)^* + G_4 \tilde{v}(\cdot,-1/2)^*, \quad w^{(\pm)} = (w_r^{(\pm)})_{r=1}^4,$$

とおけば，$\langle w^{(+)},\mathscr{F}_E g\rangle = 0$, $\langle w^{(-)},\mathscr{F}_E f\rangle = 0$. 補題 9-2 を用いて，$\{\mathscr{F}_E f \,|\, f \in \overset{4}{\oplus}\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4)\}$ は $L^2(\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^3;\mathbb{C}^4)$ で稠密であることがわかる．したがって，$w^{(\pm)}=0$. これは，$w^{(\pm)}(\boldsymbol{k})=0$, a.e. $\boldsymbol{k}$ を意味する．$\{u(\boldsymbol{k},s)\}_{s=\pm1/2}$, $\{\tilde{v}(\boldsymbol{k},s)^*\}_{s=\pm1/2}$ はそれぞれ一次独立であるから，$G_r(\boldsymbol{k})=0$, a.e. $\boldsymbol{k}$ $(r=1,2,3,4)$ がしたがう．よって，$G=0$. □

各 $(a,A)\in\tilde{\mathscr{P}}_+^{\uparrow}$ に対して，D_0 を定義域とする線形作用素 $Y_0(a,A)$ を

$$Y_0(a,A)(J(g)+K(f)) := J\left(S(A^{-1})^* g_{(a,\Lambda(A))}\right) + K\left({}^T S(A^{-1}) f_{(a,\Lambda(A))}\right) \tag{11.139}$$

によって定義する $(g,\ f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4))$.

補題 11-15　すべての $(a,A)\in\tilde{\mathscr{P}}_+^{\uparrow}$ に対して，$Y_0(a,A)$ は D_0 から D_0 の上の等長作用素であり，

$$Y_0(a,A)Y_0(b,B) = Y_0((a,A)(b,B)), \quad (a,A),(b,B)\in\tilde{\mathscr{P}}_+^{\uparrow}, \tag{11.140}$$

が成り立つ．

証明　任意の $g,\ f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^4)$ に対して，

$$\|J(g)+K(f)\|^2 = \|J(g)\|^2 + \|K(f)\|^2.$$

(11.89), (11.90) および $P_{\pm}(\boldsymbol{k})$ が $\mathbb{C}^4$ 上の正射影作用素であることを用いると

$$\|J(g)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k}), P_+(\boldsymbol{k})(\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k})\rangle_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k}, \tag{11.141}$$

$$\|K(f)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\mathscr{F}_E f)(\boldsymbol{k})^*, P_-(-\boldsymbol{k})(\mathscr{F}_E f)(\boldsymbol{k})^*\rangle_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k} \tag{11.142}$$

と変形できる．$\mathscr{F}_E g$ の定義から，

$$\mathscr{F}_E g_{(a,\Lambda(A))}(\boldsymbol{k}) = e^{ia\tilde{k}}(\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k}_{\Lambda(A)}). \tag{11.143}$$

ただし，$\tilde{k} := (E(\boldsymbol{k})/\hbar, \boldsymbol{k})$ $(\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3)$ であり，$\boldsymbol{k}_{\Lambda(A)} \in \mathbb{R}^3$ は，(9.44) において，$d = 3$, $\omega = E/\hbar$, $\Lambda = \Lambda(A)$ としたものによって定義される．これと (11.141)~(11.143) によって，

$$\begin{aligned}
&\|J(S(A^{-1})^* \mathscr{F}_E g_{(a,\Lambda(A))})\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k}_{\Lambda(A)}), S(A^{-1})P_+(\boldsymbol{k})S(A^{-1})^*(\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k}_{\Lambda(A)})\rangle_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k}, \\
&\|K({}^T S(A^{-1})\mathscr{F}_E f_{(a,\Lambda(A))})\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\mathscr{F}_E f)(\boldsymbol{k}_{\Lambda(A)})^*, S(A^{-1})P_-(-\boldsymbol{k})S(A^{-1})^*(\mathscr{F}_E f)(\boldsymbol{k}_{\Lambda(A)})^*\rangle_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

が得られる．(11.27) を使うと

$$S(A^{-1})\gamma^0 S(A^{-1})^* = \gamma^0$$

が示される．これと (11.28), (11.110), (11.111) から

$$S(A^{-1})P_+(\boldsymbol{k})S(A^{-1})^* = \frac{(M + \hbar\gamma^\mu(\Lambda(A)^{-1}\tilde{k})_\mu)\gamma^0}{2E(\boldsymbol{k})}$$

および

$$S(A^{-1})P_-(-\boldsymbol{k})S(A^{-1})^* = -\frac{\gamma^0(M - \hbar\hat{\gamma}^\mu(\Lambda(A)^{-1}\tilde{k})_\mu)}{2E(\boldsymbol{k})}$$

が導かれる．ただし，$\hat{\gamma}^0 := \gamma^0$, $\hat{\gamma}^j := -\gamma^j$ $(j = 1, 2, 3)$．これらの事実と測度 $d\boldsymbol{k}/E(\boldsymbol{k})$ の $\mathscr{L}_+^\uparrow$ 不変性 (補題 9-8) により，

$$\begin{aligned}
\|J(S(A^{-1})^* \mathscr{F}_E g_{(a,\Lambda(A))})\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k}), P_+(\boldsymbol{k})(\mathscr{F}_E g)(\boldsymbol{k})\rangle_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k} \\
&= \|J(g)\|^2, \\
\|K({}^T S(A^{-1})\mathscr{F}_E f_{(a,\Lambda(A))})\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle (\mathscr{F}_E f)(\boldsymbol{k})^*, P_-(-\boldsymbol{k})(\mathscr{F}_E f)(\boldsymbol{k})^*\rangle_{\mathbb{C}^4}\, d\boldsymbol{k} \\
&= \|K(f)\|^2
\end{aligned}$$

を得る．したがって，$\| Y_0(a, A)(J(g) + K(f)) \|^2 = \| J(g) + K(f) \|^2$ が成立する．ゆえに $Y_0(a, A)$ は等長である．

(11.140) は，(11.29), (11.143) および k_Λ の性質 (補題 9-9 の証明を参照) を用い

ることにより，単なる代数的計算によって導かれる．

(11.140) で，$(b, B) = (a, A)^{-1}$ とおけば，$Y_0(a, A)Y_0(b, B)(J(g) + K(f)) = J(g) + K(f)$ であり，$Y_0(b, B)(J(g) + K(f)) \in D_0$ であるから，$Y_0(a, A)$ は D_0 の上への写像である．□

補題 11-15 と有界線形作用素の拡大定理により，$Y_0(a, A)$ は $L^2(\boldsymbol{R}^3_{\boldsymbol{k}}; \mathbb{C}^4)$ 上のユニタリ作用素へと一意的に拡大される．この拡大を $Y(a, A)$ と記す．この場合，(11.140) も拡大され，

$$Y(a, A)Y(b, B) = Y((a, A)(b, B)), \quad (a, A), (b, B) \in \tilde{\mathscr{P}}^{\uparrow}_{+}, \tag{11.144}$$

が成り立つ．

補題 11-16　$\{Y(a, A) \,|\, (a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}^{\uparrow}_{+}\}$ は $\tilde{\mathscr{P}}^{\uparrow}_{+}$ のユニタリ表現である．

証明　補題 11-15 と (11.144) により，対応：$(a, A) \longrightarrow Y(a, A)$ $((a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}^{\uparrow}_{+})$ の強連続性だけ示せばよい．そのためには，任意の $\psi, \phi \in D_0$ に対して，$\langle \psi, Y(a, A)\phi \rangle$ の (a, A) に関する弱連続性を示せば十分である (補題 7-11 を参照)．これは，命題 9-9 における，$u(a, \Lambda)$ の強連続性の証明と同様な仕方でなされる．詳細を埋めることは，読者の演習とする．□

定理 11-12 の証明　任意の $(a, A) \in \tilde{\mathscr{P}}^{\uparrow}_{+}$ に対して，

$$U(a, A) := \Gamma_{\mathrm{f}}(Y(a, A)) \tag{11.145}$$

と定義すれば，$Y(a, A)$ の構成の仕方と補題 11-13，補題 11-16 により，この $U(a, A)$ が求めるものであることがわかる．□

注意 11-5　(11.133b) は，作用素値超関数核を用いて象徴的に書けば，

$$U(a, A)\psi_r(x)U(a, A)^{-1} = \sum_{r'=1}^{4} S(A)^{-1}_{rr'}\psi_{r'}(\Lambda(A)x + a) \tag{11.146}$$

ということである．右辺は，Poincaré 変換された自由な量子 Dirac 場を表す．(11.146) は，これがもとの場 $\psi(x)$ とユニタリ同値であることを示す．しかも，この場合，この同値をあたえるユニタリ作用素は $\tilde{\mathscr{P}}^{\uparrow}_{+}$ のユニタリ表現となっている．

注意 11-6　自由な量子 Dirac 場の構成は，Poincaré 共変性が，より明白になるような形で定式化されうる．これについては，たとえば，ボゴリューボフ他 (1972) の 2 章，§4 を参照．

ノート

自由な Dirac 場の量子化に続く次の段階として，比較的，数学的に解析しやすく，物理的にも興味がある問題として，量子 Dirac 場が外場 (古典的な電場や磁場) と相互作用する系に対する量子論の構成の問題がある．この問題は**外場問題** (external field problem) と呼ばれている．このような系では，電子-陽電子対の生成が起こり得る．この問題についての形式的な議論については，たとえば，Itzykson and Zuber (1980) の §4.3 を，数学的に厳密な研究については，Thaller (1992) の Chapter 10 とそこに引用されている文献 (Notes の Chaper 10 の項)，Arai and Tominaga (1996) 等を参照.

量子 Dirac 場と量子輻射場が相互作用する系に対する量子論が量子電磁力学であるが，4 次元時空における量子電磁力学を数学的に構成する問題はまだ解かれていない．量子電磁力学への公理論的なアプローチは，Strocchi and Wightman (1974), Strocchi (1993) とそこに引用されている文献に詳しく論じられている．他方，形式的摂動論に数学的な意味づけを行うアプローチとして，Scharf (1989) や Dütsch and Fredenhagen (1999) などがある．異色のアプローチとして，超準解析を用いて，**朝永-Schwinger 方程式**から量子電磁力学を数学的に基礎づける試みもある (Wakita (1976, 1984a, 1984b)).

11 章演習問題

♮**1.** (11.22d), (11.22b) は (11.1) から導かれること，すなわち，γ^μ の行列表示の取り方に依らず成り立つこと示せ.

♮**2.** $C^1(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^4)$ を $\mathbb{R}^4$ 上の $\mathbb{C}^4$-値関数で 1 回連続微分可能なものの全体とする．$\psi \in C^2(\mathbb{R}^4;\mathbb{C}^4)$ は Dirac 方程式 (11.4) の解で，任意の $T>0$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|t|\le T} \|\partial_j \psi(t,\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4}^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3} \sup_{|t|\le T} \|\psi(t,\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}^4}^2 \, d\boldsymbol{x} < \infty,$$

をみたすとする.

(i) (11.42) によって定義されるハミルトニアン $H^{\mathrm{cl}}(t)$ に対して，$dH^{\mathrm{cl}}(t)/dt=0$ を示せ.

ヒント (11.43) を用いると，あたえられた積分条件のもとで，(11.11) の右辺において，t に関する微分と積分の順序が交換でき，

$$\frac{dH^{\mathrm{cl}}(t)}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\partial_t \psi^*(t,\boldsymbol{x})\right](-i\alpha\cdot\nabla+\beta m)\psi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(t,\boldsymbol{x})(-i\alpha\cdot\nabla+\beta m)\partial_t\psi(t,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

と変形できることがわかる．右辺に (11.43) を代入し，(11.22a), (11.22b) を使って計算せよ.

(ii) (11.44) によって定義される運動量 $P_j^{\mathrm{cl}}(t)$ に対して，$dP_j^{\mathrm{cl}}(t)/dt=0$ を示せ.

♮**3.** 問題 2 と同じ条件のもとで，(11.46) によって定義される Q_{cl} について，$dQ_{\mathrm{cl}}/dt = 0$ を示せ．

♮**4.** (11.51) を示せ．

♮**5.** (11.56) を示せ．

♮**6.**

(i)　反交換関係

$$s_j s_l + s_l s_j = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2, 3,$$

を示せ．

(ii)　(i) を用いて，(11.80) を示せ．

♮**7.**

(i)　次の交換関係および反交換関係を示せ：

$$[s_j, \gamma^j] = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\{s_j, \gamma^l\} = 0, \quad j \neq l,\ j, l = 1, 2, 3.$$

(ii)　交換関係

$$[s_j, \gamma^l] = i\hbar \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_{jlp}\gamma^p$$

を示せ．ただし，ε_{jlp} は，j, l, p に関して反対称であり，$\varepsilon_{123} := 1$．

(iii)　交換関係

$$[s_j, \alpha^l] = i\hbar \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_{jlp}\alpha^p$$

を示せ．

(iv)　(iii) を用いて，任意の $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k}$ は $\hat{h}_D(\boldsymbol{k})$ と可換であることを示せ．

8. 各 $u \in \mathbb{C}^2$ に対して，$x(u) = (x(u)^\mu)_{\mu=0}^3 \in \mathbb{R}^4$ を

$$x(u)^\mu := \langle u, \sigma^\mu u\rangle_{\mathbb{C}^2}$$

によって定義する．任意の $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して，

$$x(Au)^\mu = \Lambda(A)^\mu{}_\nu x(u)^\nu, \quad \mu = 0, \cdots, 3,$$

を示せ．

ヒント　(11.8) と (11.13) を用いよ．

注意　$V := \mathscr{L}\{x(Au) \mid u \in \mathbb{C}^2, A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\}$ とする．このとき，問題 8 の結果は，V が表現 $\{\Lambda(A) \mid A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\}$ の不変部分空間の 1 つであることを示している．物理的には，ス

ピノル u が $u \longrightarrow Au$ と変換するとき，ベクトル $x(u)$ は Lorentz 変換 $\Lambda(A)$ にしたがって変換することを意味する．つまり，$x(u)$ は Lorentz 変換に対する 4 元ベクトルである．

9. $\mathscr{V}$ をベクトル空間とし，T_μ $(\mu = 0,1,2,3)$ を $\mathscr{V}$ 上の線形作用素で互いに可換，すなわち，$[T_\mu, T_\nu] = 0$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$ をみたすとする．任意の 4 次の正方行列 $K = (K_{ij})_{i,j=1,2,3,4}$ に対して，

$$(\hat{K}v)_i := \sum_{j=1}^{4} K_{ij}v_j, \quad i = 1,2,3,4,\ v = (v_j)_{j=1}^4 \in \overset{4}{\oplus}\mathscr{V},$$

によって $\overset{4}{\oplus}\mathscr{V}$ 上の作用素 $\hat{K}$ が定義される．以下，$\hat{K}$ も K で表す．また，$\overset{4}{\oplus}\mathscr{V}$ 上の作用素 $\overset{4}{\oplus}T_\mu$ も単に T_μ と記す．

(i) $S = \gamma^\mu T_\mu$ とおくと，$S^2 = T_\mu T^\mu$ であることを示せ．

ヒント　$S^2 = T_\mu T_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = T_\mu T_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ と変形せよ．

(ii) $R = \sum_{j=1}^{3} T_j \alpha^j$ とおくと，$R^2 = \sum_{j=1}^{3} T_j^2$ であることを示せ．

ヒント　(i) と同様 ($\{\alpha_j\}_{j=1}^3$ の反交換関係 (11.22a) を使う)．

(iii) $\mu = 0,1,2,3$ に対して，D_μ を変数 x^μ に関する一般化された偏微分作用素とし，$\Delta := \sum_{j=1}^{3} D_j^2$ (一般化された 3 次元ラプラシアン) とおく．(i) を応用して，ベクトル空間 $\overset{4}{\oplus}\mathscr{S}'(\mathbb{R}_x^4)$ 上の作用素の等式として，$(\gamma^\mu D_\mu)^2 = D_0^2 - \Delta$ (一般化された 4 次元ダランベールシャン) を示せ．

(iv) (ii) を応用して，任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して，$\overset{4}{\oplus}\mathscr{S}'(\mathbb{R}_x^4)$ 上の作用素の等式として $\left(a\beta D_0 + b\sum_{j=1}^{3} \alpha^j D_j\right)^2 = a^2 D_0^2 + b^2 \Delta$ を示せ．

第 12 章

van Hove モデル

相互作用を有する量子場のモデルうちでもっとも簡単で基本的なものを解析する．

12-1 節　はじめに

9 章で自由な量子スカラー場を構成したが，これは素粒子の相互作用を記述するモデルではなかった．この章では，相互作用を記述する量子スカラー場のうちでもっとも扱い易いモデルを構成する．これはある固定された古典的な場 (外場あるいは源) と量子スカラー場の相互作用を記述するモデルである．まず，考察するモデルの古典場の形式を簡単に見ておこう．

$m \geq 0$, $d \in \mathbb{N}$ を定数とし，偏微分方程式

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = \varrho(\boldsymbol{x}), \quad x = (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \tag{12.1}$$

にしたがう実スカラー場 $\varphi(x)$ の量子化を考える．ここで，ϱ は $\mathbb{R}^d$ 上の実数値関数あるいはもっと一般的には実超関数であり，物理的にはあたえられた源あるいは外場をさす．この場の方程式を導くラグランジュ密度関数は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2}\left\{(\partial_t\varphi(x))^2 - |\nabla\varphi(x)|^2 - m^2\varphi(x)^2\right\} + \varrho(\boldsymbol{x})\varphi(x)$$

である．したがって，古典的なハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\left\{\pi(t,\boldsymbol{x})^2 + |\nabla\varphi(t,\boldsymbol{x})|^2 + m^2\varphi(t,\boldsymbol{x})^2\right\} - \int_{\mathbb{R}^d} d\boldsymbol{x}\,\varrho(\boldsymbol{x})\varphi(t,\boldsymbol{x}) \tag{12.2}$$

であたえられる．ただし，$\pi = \partial_t \varphi$．容易にわかるように，H_{cl} は時刻 t に依存しない．

このモデルの量子化は，**固定湧源モデル** (fixed source model) あるいは **van Hove モデル**とよばれる．これは場と源の相互作用を記述するが，相対論的ではなく，非相対論的な量子場のモデルである (問題 1, 2)．

物理への応用では，このモデルは，核力 — 原子核の構成要素である核子の間に働く引力 — の場の量子化を記述する．この場合，ϱ は核力の源である核子の分布密度を表し，φ はそれによって生じる古典的な核力の場を記述する．湯川秀樹の中間子論によれば，核力は核子どうしが中間子を交換することによって生じるとされる．したがって，量子論では，核力の場は量子化された中間子の場を表す．

例 12-1　N 個の核子が存在するような状況を考え，n 番目の核子は点 $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^d$ $(n = 1, \cdots, N)$ のまわりに広がって分布しているとする．n 番目の核子の分布密度関数 ξ_n は $L^1(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ の要素で表されると仮定し，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \xi_m(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 1$ $(n = 1, \cdots, N)$ とする．このとき，N 個の核子の系の分布密度関数は

$$\varrho(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \xi_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n)$$

によって定義される．ただし，λ_n は実定数である．関数 ξ_n の台が点 $\boldsymbol{x}_n$ のまわりに集中している場合，このような関数は，n 番目の核子を，点 $\boldsymbol{x}_n$ の“近くに”集中する波束として記述する．ξ_n の台が点 $\boldsymbol{x}_n$ に集中すればするほど，n 番目の核子は点様の対象に近づく (次の例を参照)．

例 12-2　核子が $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N \in \mathbb{R}^d$ に集中している場合の分布密度は

$$\varrho^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \delta^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n) \tag{12.3}$$

によって記述される．ここで，$\delta^d(\boldsymbol{x})$ は d 次元における，Dirac のデルタ超関数である．このような源は**点源**とよばれる．

一般に，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 1$ をみたす任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ と $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の位相で

$$\lim_{\kappa\to\infty} \kappa^d f(\kappa(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})) = \delta^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \tag{12.4a}$$

すなわち，任意の $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{\kappa\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \kappa^d f(\kappa(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))u(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = u(\boldsymbol{a}) \tag{12.4b}$$

が成立する (問題 3).

この事実を用いると，$\varrho^{(\mathrm{p})}$ は例 12-1 の核子分布のある種の極限によって得られることがわかる．すなわち，

$$\varrho_\kappa(\boldsymbol{x}) := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \kappa^d \xi_n(\kappa(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n)) \tag{12.5}$$

とすれば，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ の位相で

$$\lim_{\kappa\to\infty} \varrho_\kappa(\boldsymbol{x}) = \varrho^{(\mathrm{p})}(\boldsymbol{x}) \tag{12.6}$$

が成り立つ．

さて，上述の古典場の理論に対応する量子場の理論を正準量子化の方法で構成するには，H_{cl} が時刻 t によらないことに注意して，$t=0$ の場を用いて，量子ハミルトニアンを定義することである．これが以下の手続きの基本的アイディアである．

実数 s に対して，

$$H_\omega^s(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) := \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \,|\, \omega^s \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d_k)\} \tag{12.7}$$

とおく．ただし，$\hat{f}$ は f の (超関数の意味での) フーリエ変換である．ω は (0.31) で定義される関数である．$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ 上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ における消滅作用素を $a(\cdot)$ と記し，$f \in H_\omega^{-1/2}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$, $g \in H_\omega^{1/2}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ に対して，

$$\phi_0(f) = \phi^{\mathrm{free}}(0, f) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right)^* + a\left(\frac{\hat{f^*}}{\sqrt{\omega}}\right)\right\}, \tag{12.8}$$

$$\pi_0(g) = \pi^{\mathrm{free}}(0, f) = i\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a(\sqrt{\omega}\hat{g})^* - a(\sqrt{\omega}\hat{g^*})\right\}, \tag{12.9}$$

とおく．これらは，時刻 0 での自由な量子スカラー場である ((9.25a), (9.25b) を参照)[1)].

源を表す実超関数 ϱ は

$$\varrho \in H_\omega^{-1/2}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}) \tag{12.10}$$

をみたすと仮定し，古典的ハミルトニアン H_{cl} の量子版を

$$H_\varrho := H_0 - \phi_0(\varrho), \tag{12.11a}$$

$$D(H_\varrho) := D(H_0) \cap D(\phi_0(\varrho)) \tag{12.11b}$$

[1)] この章から，c (真空中の光速) $= 1$ に加えて，$\hbar = 1$ でもある単位系を使用する．

によって定義する．ただし，H_0 は (9.30) によって定義される自由場のハミルトニアンである．いまの場合，$\hbar = 1$ の単位系なので，$E_{\mathrm{R}} = \omega$，したがって，

$$H_0 = d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) \tag{12.12}$$

である．

(12.11a) の右辺の型の作用素は，第 2 量子化作用素に Segal の場を加えてつくられる，一般的な作用素の特別な場合と見ることができる．先取りして言えば，この一般的・抽象的作用素を考察した方が van Hove モデルの普遍的な数学的構造をより明晰に認識できる．そこで，次の節以下において，van Hove モデルの抽象版を定義し，これを解析する．上の具象的な van Hove モデルの性質は，抽象的 van Hove モデルの単なる応用として導出される．

12-2 節　抽象的 van Hove モデルの基本的性質

12-2-1　抽象的 van Hove モデルの定義

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とし，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ を $\mathscr{H}$ 上のボソンフォック空間とする (4 章を参照)．4 章の記号をそのまま使う．ただし，**以後，Segal の場 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ ($f \in \mathscr{H}$) の閉包 $\overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f)}$ も同じ記号 $\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ で表す**[2]．

T をヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の非負かつ単射な自己共役作用素とする．各 $g \in \mathscr{H}$ に対して，作用素

$$H_T(g) := d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \Phi_{\mathrm{S}}(g) \tag{12.13}$$

を考える[3]．$H_T(g)$ が対称作用素であることは明らかである．

作用素 $H_T(g)$ が (本質的に) 自己共役であるとき，$H_T(g)$ をハミルトニアン，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ ($f \in \mathscr{H}$) を時刻 0 の場とする抽象的量子場のモデル $(H_T(g), \Phi_{\mathrm{S}})$ を**抽象的 van Hove モデルとよぶ**[4]．

例 12-3　$\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$, $T = \omega$, $g = -\hat{\varrho}/\sqrt{\omega}$ の場合がもともとの van Hove モデル — 具象的 van Hove モデル — である．ただし，この場合の時刻 0 の場は

$$\phi_0(f) = \Phi_{\mathrm{S}}\left(\frac{\widehat{\mathrm{Re}\, f}}{\sqrt{\omega}}\right) + i\Phi_{\mathrm{S}}\left(\frac{\widehat{\mathrm{Im}\, f}}{\sqrt{\omega}}\right), \quad f \in H_\omega^{-1/2}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}),$$

---

[2] 式の中で使用される意味をきちんとつかんでいれば混乱は生じないはずである．

[3] 特に断らない限り，2 つの線形作用素 A, B の和 $A + B$ の定義域 $D(A + B)$ は，通常の定義通り，$D(A) \cap D(B)$ である．

[4] 7 章，7-5 節を参照．

である．この点は，抽象的 van Hove モデルの結果を応用するときに注意しなければならない．

明らかに，$g = 0$ の場合，$H_T(0) = d\Gamma_{\rm b}(T)$ である．$d\Gamma_{\rm b}(T)$ をハミルトニアン，$\Phi_{\rm S}(f)$ ($f \in \mathscr{H}$) を時刻 0 の場とする抽象的量子場のモデルを**抽象的自由ボース場**とよぶ．

$g \neq 0$ ならば，抽象的 van Hove モデルは抽象的自由ボース場の理論にユニタリ同値でない．これは次の理由による．仮に，これら 2 つの理論がユニタリ同値であるとすれば，$Ud\Gamma_{\rm b}(T)U^{-1} = H_T(g) - E$, $U\Phi_{\rm S}(f)U^{-1} = \Phi_{\rm S}(f)$ ($f \in \mathscr{H}$) となる，$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U がある．ここで，$E \in \mathbb{R}$ は定数である[5)]．(4.70a), (4.70b) によって，第 2 番目の式は，すべての $f \in \mathscr{H}$ に対して，$UA(f)^\sharp \subset A(f)^\sharp U$ を意味する．したがって，命題 4-6 により，定数 c があって，$U = c$ (スカラー作用素)．ゆえに，$d\Gamma_{\rm b}(T) = H_T(g) - E$．したがって，$\Phi_{\rm S}(g) = E$．だが，$g \neq 0$ であるから，これは不可能である．

こうして，$g \neq 0$ の場合，抽象的 van Hove モデルは抽象的自由ボース場の理論とは本質的に異なる理論であることがわかる．

12-2-2 若干の注意 — 線形作用素の摂動論について

作用素 $H_T(g)$ の詳しい解析に入る前に，ここで，この解析に関わる問題の一般的な背景に簡単にふれておく．

ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ において，自己共役作用素 T_0 があたえられたとする．実数パラメータ λ に依存する対称作用素 $T_1(\lambda)$ で $T_1(0) = 0$ をみたすものをとり，作用素 $T(\lambda) := T_0 + T_1(\lambda)$ を考える．この場合，$T_1(\lambda)$ を T_0 に対する**摂動** (perturbation) とよび，$T(\lambda)$ を ($T_1(\lambda)$ によって) **摂動を受けた作用素** (perturbed operator) あるいは $T_1(\lambda)$ **による** T_0 **の摂動**という．T_0 を**無摂動作用素** (unperturbed operator)，λ を**摂動パラメータ**とよぶ．

例 12-4 作用素 $T_1(\lambda)$ の典型的な形として，(i) $T_1(\lambda) = \lambda S$，(ii) $T_1(\lambda) = \lambda S_1 + \lambda^2 S_2$ というものがある．ただし，S, S_1, S_2 は $\mathscr{K}$ 上の対称作用素である．

量子場の理論に現れるハミルトニアンが $T(\lambda)$ の形をしているとき，T_0 を**無摂動ハミルトニアン**，$T_1(\lambda)$ を**相互作用** (interaction) とよぶ．

抽象的 van Hove モデルの場合，$d\Gamma_{\rm b}(T)$ が無摂動ハミルトニアンであり，$\Phi_{\rm S}(g)$ が

---

5) ハミルトニアンをもつ量子場の理論にあっては，ハミルトニアンは定数だけずらす任意性をもつ．

相互作用である．この場合，摂動パラメータ λ は g の中にくりこまれているとみなされる．というのは，$\Phi_{\mathrm{S}}(\lambda g) = \lambda\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ であるので，もし，λ をあらわにいれたければ，g を λg で置き換えればよいからである．抽象的 van Hove モデルは，12-2-1 項で述べたように，抽象的自由ボース場の理論とユニタリ同値でないという意味で，真に相互作用を記述する理論である[6]．

無摂動作用素 T_0 の性質がよくわかっているとき，$T(\lambda)$ の性質を T_0 の性質と関連させながら研究するのが**線形作用素の摂動論**とよばれる理論である．この理論にあっては，特に，次の問題が基本的である：

(P.1)(自己共役性の問題)　どのような条件のもとで $T(\lambda)$ は自己共役あるいは本質的に自己共役か？

(P.2)　T_0 が固有値 E をもつとき，ある定数 $\lambda_0 > 0$ があって，任意の $|\lambda| < \lambda_0$ に対して，$T(\lambda)$ が固有値 $E(\lambda)$ をもち，かつ $\lim_{\lambda\to 0} E(\lambda) = E$ が成り立つとき，T_0 の固有値 E は摂動 $T_1(\lambda)$ $(|\lambda| < \lambda_0)$ のもとで**安定である** (stable) とよばれる．この意味で，T_0 の固有値は摂動 $T_1(\lambda)$ のもとで安定であるか？

(P.3)　$T(\lambda)$ のスペクトル特性を T_0 と $T_1(\lambda)$ に関わる量で表現せよ．

これらの問題の解析は数学の一大分野を形成するほど豊かな内容を包摂するものであり，その段階的解決を通して，われわれは線形作用素が織りなす理念界の驚くべき多様性と深みへと導かれる (Kato (1976), Reed and Simon (1975) の Chapter X, Reed and Simon (1978, 1979) などを参照)．特に，固有値の摂動問題は極めて微妙な問題をはらんでいることを注意しておこう．

問題 (P.1) に関する基本的結果を採録しておく．これは後に使用する．

加藤-Rellich (レリッヒ) の定理　$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間，A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．B は $\mathscr{H}$ 上の対称作用素で次の性質をみたすとする：$D(A) \subset D(B)$ かつ定数 $a, b \geq 0$ が存在して，すべての $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\|B\Psi\| \leq a\|A\Psi\| + b\|\Psi\|. \qquad (\blacklozenge)$$

さらに，$a < 1$ であるとしよう．このとき，$A + B$ は自己共役であり，A の任意の芯上で本質的に自己共役である．さらに，A が下に有界で $A \geq \gamma$ (γ は実定数) ならば，$A + B$ も下に有界であり，

[6] 量子場の理論にあっては，ハミルトニアンの外見上の形だけで相互作用を記述する理論であるかどうかは決められないことに注意．これは時刻 0 の場のとりかたに依存しながら決まる．

$$A+B \geq \gamma - \max\left\{\frac{b}{1-a}, a|\gamma|+b\right\}$$

が成立する．

この定理の証明については，たとえば，Reed and Simon (1975) の p.162，Theorem X.12，Kato (1976) の p.287，Theorem 4.3, p.291, Theorem 4.11 を参照．

注意 12-1 (i) A, B が一般の作用素で，$D(A) \subset D(B)$ かつ (◆) がみたされるとき，B は **A-有界**あるいは A に**関して相対的に有界**であるという．この場合，a を B の A **に関する相対限界 (relative bound)** あるいは **A-限界**とよぶ (定数 a, b は，一般には，たがいに関連しあいながら決まる)．

B の A-限界がいくらでも小さい正数にとれるとき，B は A **に関して無限小**であるという．

(ii) B が有界ならば ($D(B) = K$ とする)，B は任意の線形作用素 A に関して無限小である．実際，この場合，$a=0$, $b=\|B\|$ によって，(◆) がみたされる．したがって，加藤–Rellich の定理の特別な場合として，次の事実が成立する：

A が自己共役で B が有界な対称作用素ならば，$A+B$ は自己共役であり，A の任意の芯上で本質的に自己共役である．

加藤-Rellich の定理の応用を 1 つ述べておく．

補題 12-1 $\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，A を $\mathscr{K}$ 上の非負自己共役作用素，B を $\mathscr{K}$ 上の対称作用素で $D(A^{1/2}) \subset D(B)$ かつ任意の $\Psi \in D(A^{1/2})$ に対して，

$$\|B\Psi\| \leq c\|A^{1/2}\Psi\| + d\|\Psi\|$$

をみたすものとする．ここで，c, d は非負の定数である．このとき，次の (i)〜(iv) が成立する．

(i) $A+B$ は $D(A)$ 上で自己共役であり，A の任意の芯上で本質的に自己共役である．さらに，$A+B$ は下に有界であり，

$$A+B \geq -\min_{0<\varepsilon<1} \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}+d\right). \tag{12.14}$$

(ii) 任意の $\Psi \in D(A)$ と $\varepsilon \in (0,1)$ に対して，

$$\|A\Psi\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|(A+B)\Psi\| + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}+d\right)\|\Psi\|.$$

(iii)　M を $A+B+M \geq 0$ となる任意の実数とする．このとき，任意の $\Psi \in D((A+B+M)^{1/2})$ と $\varepsilon \in (0,1)$ に対して，$\Psi \in D(A^{1/2})$ であり，

$$\|A^{1/2}\Psi\|^2 \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|(A+B+M)^{1/2}\Psi\|^2 + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{c^2}{4\varepsilon}+d-M\right)\|\Psi\|^2. \tag{12.15}$$

(iv)　M を (iii) の実数として，$D(A^{1/2}) = D((A+B+M)^{1/2})$.

証明　(i) $\Psi \in D(A)$ とすれば，シュヴァルツの不等式によって，

$$\|A^{1/2}\Psi\| \leq \|\Psi\|^{1/2}\|A\Psi\|^{1/2}.$$

任意の a, b, $\varepsilon > 0$ に対して成立する不等式

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon} \tag{12.16}$$

を使えば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$c\|A^{1/2}\Psi\| \leq \varepsilon\|A\Psi\| + \frac{c^2}{4\varepsilon}\|\Psi\|.$$

したがって，

$$\|B\Psi\| \leq \varepsilon\|A\Psi\| + \left(\frac{c^2}{4\varepsilon}+d\right)\|\Psi\|.$$

$0 < \varepsilon < 1$ とすれば，加藤-Rellich の定理が応用できるので，$A+B$ の自己共役性および本質的自己共役性に関する主張が得られる．加藤–Rellich の定理における，$A+B$ の下界の評価において，$\gamma = 0$, $a = \varepsilon$, $b = (c^2/4\varepsilon)+d$ とすれば (12.14) が得られる．

(ii) 任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\begin{aligned}\|A\Psi\| &\leq \|(A+B)\Psi\| + \|B\Psi\| \\ &\leq \|(A+B)\Psi\| + \varepsilon\|A\Psi\| + \left(\frac{c^2}{4\varepsilon}+d\right)\|\Psi\|.\end{aligned}$$

これから，求める不等式が得られる．

(iii) 任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\begin{aligned}\|A^{1/2}\Psi\|^2 &= \langle\Psi,(A+B+M)\Psi\rangle - \langle\Psi,B\Psi\rangle - M\|\Psi\|^2 \\ &\leq \|(A+B+M)^{1/2}\Psi\|^2 + \|\Psi\|\|B\Psi\| - M\|\Psi\|^2 \\ &\leq \|(A+B+M)^{1/2}\Psi\|^2 + \|\Psi\|(c\|A^{1/2}\Psi\| + d\|\Psi\|) - M\|\Psi\|^2\end{aligned}$$

$$\leq \|(A+B+M)^{1/2}\Psi\|^2 + \varepsilon\|A^{1/2}\Psi\|^2 + \left(\frac{c^2}{4\varepsilon} + d - M\right)\|\Psi\|^2.$$

ただし，$\varepsilon > 0$ は任意である．これから，任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，(12.15) が導かれる．これと補題 4-21 の応用により，主張が証明される．

(iv) (iii) から，$D((A+B+M)^{1/2}) \subset D(A^{1/2})$．一方，任意の $\Psi \in D(A)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|(A+B+M)^{1/2}\Psi\|^2 &= \langle \Psi, A\Psi\rangle + \langle \Psi, B\Psi\rangle + M\|\Psi\|^2 \\
&\leq \|A^{1/2}\Psi\|^2 + (c\|A^{1/2}\Psi\| + d\|\Psi\|)\|\Psi\| + M\|\Psi\|^2 \\
&\leq (1+\varepsilon)\|A^{1/2}\Psi\|^2 + \left(\frac{c^2}{4\varepsilon} + d + M\right)\|\Psi\|^2.
\end{aligned}$$

ここで，$\varepsilon > 0$ は任意である．$D(A)$ は $A^{1/2}$ の芯であるから，上の不等式と補題 4-21 は $D(A^{1/2}) \subset D((A+B+M)^{1/2})$ を意味する．□

12-2-3　ハミルトニアンの自己共役性と下界性

以下，次の性質を仮定する：

$$g \in D(T^{-1/2}). \tag{12.17}$$

定理 12-2

(i)　$H_T(g)$ は $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役であり，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である．さらに，$H_T(g)$ は下に有界であり，

$$H_T(g) \geq -\min_{0<\varepsilon<1}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{\|T^{-1/2}g\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\|g\|}{\sqrt{2}}\right).$$

(ii)　任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ と $\varepsilon \in (0,1)$ に対して，

$$\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|H_T(g)\Psi\| + \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{\|T^{-1/2}g\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\|g\|}{\sqrt{2}}\right)\|\Psi\|.$$

(iii)　M を

$$H_M := H_T(g) + M \geq 0$$

となる任意の実数とする．このとき，任意の $\Psi \in D(H_M^{1/2})$ と $\varepsilon \in (0,1)$ に対して，

$$\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|H_M^{1/2}\Psi\|^2$$

$$+ \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{\|T^{-1/2}g\|^2}{2\varepsilon} + \frac{\|g\|}{\sqrt{2}} - M\right)\|\Psi\|^2.$$

(iv) $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}) = D(H_M^{1/2})$.

(v) 任意の $f \in D(T) \cap D(T^{-1/2})$ に対して，$A(f)$ は $D(H_M^{3/2})$ を $D(H_M)$ にうつし，$D(H_M^{3/2})$ 上で交換関係

$$[A(f), H_M] = A(Tf) + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle f, g\rangle$$

が成り立つ．

証明 命題 4-24 により $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}) \subset D(\Phi_{\mathrm{S}}(g))$ であり任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\| \le \sqrt{2}\|T^{-1/2}g\|\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\| + \frac{\|g\|}{\sqrt{2}}\|\Psi\|. \tag{12.18a}$$

したがって，補題 12-1 を，$A = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$, $B = \Phi_{\mathrm{S}}(g)$, $c = \sqrt{2}\|T^{-1/2}g\|$, $d = \|g\|/\sqrt{2}$ として，応用でき，(i)~(iv) の事実を得る．

(v) については次のようにする．$\Psi \in D(H_M^{3/2})$, $f \in D(T) \cap D(T^{-1/2})$ とする．このとき，$\Psi \in D(H_M) = D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \subset D(A(f)^\sharp)$．これと定理 4-27 (i) を用いると，任意の $\Xi \in D(H_M)$ に対して，

$$\langle H_M\Xi, A(f)\Psi\rangle = \langle A(f)^*\Xi, H_M\Psi\rangle - \langle \Xi, A(Tf)\Psi\rangle + \langle \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Xi, A(f)\Psi\rangle$$
$$- \langle A(f)^*\Xi, \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\rangle$$

と変形できる．

一方，

$$\langle \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Xi, A(f)\Psi\rangle - \langle A(f)^*\Xi, \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\rangle = -\frac{\langle f, g\rangle}{\sqrt{2}}\langle \Xi, \Psi\rangle \tag{12.18b}$$

である．実際，まず Ξ が $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に属する場合には，$[A(f)^*, \Phi_{\mathrm{S}}(g)]\Xi = -\langle f, g\rangle/\sqrt{2}$ によって，(12.18b) は成立する．次に，一般の $\Xi \in D(H_M) = D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に対しては，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ が $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯であることにより，$\Xi_n \longrightarrow \Xi$, $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Xi_n \longrightarrow d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Xi$ $(n \longrightarrow \infty)$ をみたす $\{\Xi_n\}_n \subset \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ がとれる．すると，$A(f)^*$, $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ の $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}$ 有界性 (したがって，$A(f)^*$, $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ 有界) により，$\lim_{n\to\infty} A(f)^*\Xi_n = A(f)^*\Xi$, $\lim_{n\to\infty} \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Xi_n = \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Xi$ がしたがう．よって，

$$\langle \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Xi_n, A(f)\Psi\rangle - \langle A(f)^*\Xi_n, \Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\rangle = -\frac{\langle f,g\rangle}{\sqrt{2}}\langle \Xi_n, \Psi\rangle$$

において $n \longrightarrow \infty$ とすることにより，(12.18b) が得られる．

また，$H_M\Psi \in D(H_M^{1/2}) = D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ であるから $H_M\Phi \in D(A(f))$．したがって，$\langle A(f)^*\Xi, H_M\Psi\rangle = \langle \Xi, A(f)H_M\Psi\rangle$．

以上から

$$\langle H_M\Xi, A(f)\Psi\rangle = \langle \Xi, A(f)H_M\Psi\rangle - \left\langle \Xi, \left(A(Tf) + \frac{\langle f,g\rangle}{\sqrt{2}}\right)\Psi\right\rangle$$

が成立することになる．Ξ は $D(H_M)$ の元であり，H_M は自己共役であるから，これは，$A(f)\Psi \in D(H_M)$ かつ

$$H_M A(f)\Psi = A(f)H_M\Psi - \left(A(Tf) + \frac{\langle f,g\rangle}{\sqrt{2}}\right)\Psi$$

を意味する．よって題意が成立する． □

12-2-4 ハイゼンベルク場と場の方程式

ハミルトニアン $H_T(g)$ によって定まる，$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ $(f \in \mathscr{H})$ のハイゼンベルク作用素は

$$\Phi(t,f) := e^{itH_T(g)}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{-itH_T(g)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12.19}$$

によって定義される[7]．これは時刻 t における場を記述する．このハイゼンベルク場がしたがう微分方程式を導いてみよう．このためにまず，ある一般的な事実を証明する．

補題 12-3 $\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，H を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．A を $\mathscr{K}$ 上の線形作用素で次の性質をみたすものとする：

(i) ある $\alpha > 0$ に対して，$D(|H|^\alpha) \subset D(A)$ であり[8]，任意の $\Psi \in D(|H|^\alpha)$ に対して，

$$\|A\Psi\| \le c\||H|^\alpha\Psi\| + d\|\Psi\|$$

が成り立つ．ここで，c, d は非負定数である．

(ii) $AD(|H|^{\alpha+1}) \subset D(H)$．

各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$A(t) := e^{itH}Ae^{-itH}$$

---

[7] ハイゼンベルク作用素の一般概念については，新井 (1997a) の 6 章，6.6 節を参照．

[8] $|H|^\alpha := \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^\alpha \, dE_H(\lambda)$ (E_H は H のスペクトル測度 (単位の分解))．

とおく．このとき，任意の $\Psi \in D(|H|^{\alpha+1})$ に対して，$A(t)\Psi$ は t について強微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}A(t)\Psi = ie^{itH}[H,A]e^{-itH}\Psi \tag{12.20}$$

が成り立つ．

注意 12-2 任意の $\beta > 0$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して，作用素解析により，$e^{-itH}D(|H|^\beta) = D(|H|^\beta)$ であるから，(12.20) の右辺は，A に対する仮定により，意味をもっている．(12.20) は，ハイゼンベルク方程式

$$\frac{d}{dt}A(t)\Psi = i[H, A(t)]\Psi$$

の形に書ける．つまり，補題 12-3 は $A(t)$ が，H から定まるハイゼンベルク方程式をみたす十分条件を定式化したものである．

証明 $t \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．任意の $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\frac{A(t+s)\Psi - A(t)\Psi}{s} \\
&= e^{i(t+s)H}A\left(\frac{e^{-isH}-1}{s} + iH\right)e^{-itH}\Psi - ie^{i(t+s)H}AHe^{-itH} \\
&\quad + \left(\frac{e^{isH}-1}{s} - iH\right)e^{itH}Ae^{-itH}\Psi + ie^{itH}HAe^{-itH}\Psi
\end{aligned} \tag{12.21}$$

と変形できる．右辺の各項を評価する．仮定 (i) により，

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{i(t+s)H}A\left(\frac{e^{-isH}-1}{s} + iH\right)e^{-itH}\Psi \right\| \\
&\leq c\left\| \left(\frac{e^{-isH}-1}{s} + iH\right)e^{-itH}|H|^\alpha\Psi \right\| + d\left\| \left(\frac{e^{-isH}-1}{s} + iH\right)e^{-itH}\Psi \right\|.
\end{aligned}$$

ここで，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f とすべての $\beta > 0$ に対して，作用素解析により，

$$|H|^\beta f(H)\psi = f(H)|H|^\beta\psi, \quad \Psi \in D(|H|^\beta f(H)) \cap D(f(H)|H|^\beta)$$

であることを用いた．任意の $\Phi \in D(H)$ に対して，

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{-isH}-1}{s} + iH\right)\Phi = 0$$

であるから，

$$\lim_{s\to 0}\left\| e^{i(t+s)H} A\left(\frac{e^{-isH}-1}{s}+iH\right)e^{-itH}\Psi\right\| = 0.$$

同様に，(12.21) の右辺の第 3 項は，$s \longrightarrow 0$ のとき，0 に収束する．(12.21) の右辺の第 2 項は，$s \longrightarrow 0$ のとき $-ie^{itH}AHe^{-itH}$ に収束する．よって題意が成立する．□

定理 12-4　$f \in D(T^2) \cap D(T^{-1/2})$ とし，H_M を定理 12-2 の (iii) で定義されるものとする．このとき，任意の $\Psi \in D(H_M^{3/2})$ に対して，$\Phi(t,f)\Psi$ は $t \in \mathbb{R}$ について，2 回強微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,f)\Psi = e^{itH_T(g)}\Phi_{\mathrm{S}}(iTf)e^{-itH_T(g)} - \mathrm{Im}\,\langle g,f\rangle\Psi, \tag{12.22a}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t,f)\Psi + \Phi(t,T^2f)\Psi = -\mathrm{Re}\,\langle g,Tf\rangle\Psi \tag{12.22b}$$

が成り立つ．

証明　(12.18a) と定理 12-2 (iii) によって，$D(\Phi_{\mathrm{S}}(g)) \supset D(H_M^{1/2})$ であり，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(g)\Psi\| \le c_1\|H_M^{1/2}\Psi\| + c_2\|\Psi\|, \quad \Psi \in D(H_M^{1/2}), \tag{12.23}$$

が成り立つ．ただし，c_1, c_2 は正の定数である．これと定理 12-2 (v) により，$A = \Phi_{\mathrm{S}}(f)$, $\alpha = 1/2$, $D = D(H_M^{3/2})$ として補題 12-3 を応用することができる．$e^{itH_M} = e^{itH_T(g)}e^{itM}$ であり，e^{itM} はスカラーであるから，

$$\Phi(t,f) = e^{itH_M}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{-itH_M}$$

と書けることに注意する．したがって，まず，任意の $\Psi \in D(H_M^{3/2})$ に対して，$\Phi(t,f)\Psi$ は t について強微分可能であり，

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,f)\Psi = ie^{itH_M}[H_M, \Phi_{\mathrm{S}}(f)]e^{-itH_M}\Psi$$

であり，これと定理 12-2 (v) により (12.22a) が得られる．

次に，上と同様の理由により，(12.22a) の右辺は t について，強微分可能であるから，これを強微分すれば，(12.22b) が得られる．□

12-3 節　スペクトル特性 (I) — $g \in D(T^{-1})$ の場合

ハミルトニアン $H_T(g)$ のスペクトルを解析するために，$H_T(g)$ に対して，適当なユニタリ変換を施すことにより，これを単純な形にもたらすことを考える．

補題 12-5 $f \in D(T)$ とする．このとき，作用素の等式

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(if)} d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)} = H_T(Tf) + \frac{1}{2}\langle f, Tf\rangle \tag{12.24a}$$

が成り立つ．特に，個数作用素 N_{b} について，作用素の等式

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(if)} N_{\mathrm{b}} e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)} = N_{\mathrm{b}} + \Phi_{\mathrm{S}}(f) + \frac{\|f\|^2}{2}, \quad f \in \mathscr{H}, \tag{12.24b}$$

が成り立つ．

注意 12-3 条件 $f \in D(T)$ は $Tf \in D(T^{-1/2})$ を意味するので，定理 12-2 により，$H_T(Tf)$ ($g = Tf$ の場合) は $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役であり，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である．

証明 $f \in D(T)$ とする．任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ $(n \in \mathbb{N})$ ((4.19) を参照) に対して，補題 4-33 によって，

$$e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \Phi_{\mathrm{S}}(if)^n \Psi}{n!}. \tag{12.25}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(if)^n\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ であることは容易にわかる．$e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi$ が $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に入ることを示すために，$\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi_{\mathrm{S}}(if)^n\Psi \|$ を評価する．任意の代数のすべての元 A, B に対して成り立つ恒等式

$$\begin{aligned} AB^n &= [A,B]B^{n-1} + B[A,B]B^{n-2} + \cdots \\ &\quad + B^{n-2}[A,B]B + B^{n-1}[A,B] + B^n A \\ &= \sum_{j=1}^{n} B^{j-1}[A,B]B^{n-j} + B^n A \end{aligned} \tag{12.26}$$

と定理 4-27 からしたがう関係式

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(T), \Phi_{\mathrm{S}}(if)]\Psi = i\Phi_{\mathrm{S}}(Tf)\Psi \tag{12.27}$$

を用いると，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi_{\mathrm{S}}(if)^n\Psi = \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{\mathrm{S}}(if)^{j-1} i\Phi_{\mathrm{S}}(Tf)\Phi_{\mathrm{S}}(if)^{n-j}\Psi + \Phi_{\mathrm{S}}(if)^n d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi$$

と変形できる．補題 4-33 の証明と同様にして，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\Phi_{\mathrm{S}}(if)^{j-1} i\Phi_{\mathrm{S}}(Tf)\Phi_{\mathrm{S}}^{n-j}\Psi\|}{n!} < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\Phi_{\mathrm{S}}(if)^n d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\|}{n!} < \infty$$

が成立することがわかる．したがって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)(-i)^n \Phi_{\mathrm{S}}(if)^n \Psi\|}{n!} < \infty.$$

この事実と $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の閉性および (12.25) により，$e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ かつ

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi_{\mathrm{S}}(if)^n\Psi}{n!}$$

が成立する．したがって，任意の $\Xi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left\langle e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Xi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi \right\rangle \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{i^n(-i)^m}{n!m!} \langle (\Phi_{\mathrm{S}}(if)^n \Xi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi_{\mathrm{S}}(if)^m \Psi\rangle \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \sum_{n=0}^{N} (-1)^{N-n} {}_N C_n \langle \Xi, \Phi_{\mathrm{S}}(if)^n d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Phi_{\mathrm{S}}(if)^{N-n}\Psi\rangle \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \langle \Xi, \mathrm{ad}^N(\Phi_{\mathrm{S}}(if))d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\rangle.
\end{aligned}$$

ここで，最後の等号へ移行する際に補題 4-38 を用いた．(12.27) と定理 4-30 (i) により，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^0(\Phi_{\mathrm{S}}(if))d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi, \\
\mathrm{ad}^1(\Phi_{\mathrm{S}}(if))d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi &= -i\Phi_{\mathrm{S}}(Tf)\Psi, \\
\mathrm{ad}^2(\Phi_{\mathrm{S}}(if))d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi &= -\langle f, Tf\rangle\Psi, \\
\mathrm{ad}^N(\Phi_{\mathrm{S}}(if))d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi &= 0, \quad N \geq 3.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\langle e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Xi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi\rangle = \left\langle \Xi, \left\{ H_T(Tf) + \frac{1}{2}\langle f, Tf\rangle \right\} \Psi \right\rangle$$

が得られる．ゆえに，

$$e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(if)} d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(if)}\Psi = \left\{ H_T(Tf) + \frac{1}{2}\langle f, Tf\rangle \right\}\Psi. \tag{12.28}$$

$D(T)$ は T の芯であるから，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の芯である．したがって，定理 12-2 によって，$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ は $H_T(Tf)$ の芯である．ゆえに (12.28) は作用素の等

式としての (12.24a) を導く．(12.24a) で $T=I$ とすれば，(12.24b) が得られる．□

以下では，7 章，7-3 節，7-3-4 項の用語法を拡大して，下に有界な任意の自己共役作用素 A に対しても，そのスペクトルの下限

$$E_0(A) := \inf \sigma(A) \tag{12.29}$$

を A の**最低ネルギー**あるいは**基底状態エネルギー**とよぶ．また，$\ker(A-E_0(A)) \neq \{0\}$ のとき,「A は**基底状態**をもつ」あるいは「A の基底状態は存在する」といい，$\ker(A-E_0(A)) \neq \{0\}$ の零でない任意の元を A の**基底状態**という．$\dim\ker(A-E_0(A)) = 1$ のとき，基底状態は**一意的**であるという．

作用素 T とベクトル g から決まる非正数

$$E_T(g) := -\frac{1}{2}\|T^{-1/2}g\|^2 \ \leq 0 \tag{12.30}$$

を導入する ($g \neq 0 \Longleftrightarrow E_T(g) < 0$)．

補題 12-5 を $H_T(g)$ に応用すれば次の結果が得られる．

定理 12-6　ベクトル g は

$$g \in D(T^{-1}) \tag{12.31}$$

をみたすとしよう．このとき，

(i)　作用素の等式

$$e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}H_T(g)e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)} = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + E_T(g) \tag{12.32}$$

が成り立つ．

(ii)　スペクトルに関して，

$$\sigma(H_T(g)) = \sigma(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) + E_T(g), \tag{12.33a}$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_T(g)) = \sigma_{\mathrm{p}}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) + E_T(g), \tag{12.33b}$$

が成立する．ただし，集合 $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}$ と実数 a に対して，$\mathbb{S}+a := \{s+a \,|\, s \in \mathbb{S}\}$ とする．さらに，(12.33b) において，$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の各固有値 E の多重度と $E+E_T(g) \in \sigma_{\mathrm{p}}(H_T(g))$ の多重度は等しい．

(iii)　ベクトル

$$\Omega_T(g) := e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}\Omega_{\mathscr{H}} \tag{12.34a}$$

は $H_T(g)$ の基底状態であり，$E_T(g)$ は $H_T(g)$ の基底状態エネルギーである：

$$E_0(H_T(g)) = E_T(g).$$

さらに，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\Omega_T(\lambda g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)^n \Omega_{\mathscr{H}}}{n!} \lambda^n, \tag{12.34b}$$

すなわち，$\Omega_T(\lambda g)$ は λ に関して，ベクトル値の解析関数である．

(iv)(基底状態の一意性)　$\ker[H_T(g) - E_0(H_T(g))]$ の任意の元はベクトル $\Omega_T(g)$ の定数倍である．

注意 12-4　作用素解析により，すべての $s \in (0,1)$ に対して，$D(T^{-1}) \subset D(T^{-s})$ である．実際，E_T を T のスペクトル測度とし，$f \in D(T^{-1})$ とすれば，任意の $s \in (0,1)$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lambda^{-2s}\, d\|E_T(\lambda)f\|^2 &= \int_{[0,1)} \lambda^{-2s}\, d\|E_T(\lambda)f\|^2 + \int_{[1,\infty)} \lambda^{-2s}\, d\|E_T(\lambda)f\|^2 \\ &\le \int_{[0,1)} \lambda^{-2}\, d\|E_T(\lambda)f\|^2 + \int_{[1,\infty)} d\|E_T(\lambda)f\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，$f \in D(T^{-s})$．ゆえに，仮定 (12.31) のもとでは，(12.17) は自動的にみたされている．

証明　(i) 補題 12-5 において，$f = T^{-1}g$ ととることにより，(12.32) が得られる．

(ii) これは (i) とスペクトルのユニタリ不変性による．

(iii) (12.32) と $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の非負性により，$E_0(H_T(g)) \ge E_T(g)$．(12.32) によって，$H_T(g)\Omega_T(g) = E_T(g)\Omega_T(g)$．ゆえに，$E_T(g)$ は $H_T(g)$ の最低エネルギーであり，$\Omega_T(g)$ は $H_T(g)$ の基底状態である．(12.34b) は $\Omega_{\mathscr{H}}$ が $\Phi(f)$ $(f \in \mathscr{H})$ の全解析ベクトルであることによる (補題 4-33 (i) を参照)．

(iv) 固有ベクトル方程式 $H_T(g)\Psi = E_T(g)\Psi$ $(\Psi \in D(H_T(g)))$ は，(12.32) によって，

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}\Psi = 0$$

と同値である．T は非負で単射であるから，これは，$e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}\Psi = c\Omega_{\mathscr{H}}$ と同値である ($c \in \mathbb{C}$ は定数．命題 4-12 (ii) を参照)．したがって，題意がしたがう．　□

注意 12-5　$T(\lambda)$ を 12-2-2 項の作用素とする．いま，T_0 は固有値 E_0 をもつとして，その固有ベクトルを ψ_0 とする：$T_0\psi_0 = E_0\psi_0$．このとき，E_0 の近くにあるであろ

うと推定される，$T(\lambda)$ の固有値 $E(\lambda)$ と固有ベクトル $\psi(\lambda)$ を形式的に λ のベキ級数

$$E(\lambda) = E_0 + E_1\lambda + E_2\lambda^2 + \cdots ,$$

$$\psi(\lambda) = \psi_0 + \psi_1\lambda + \psi_2\lambda^2 + \cdots$$

によって求めようするのが，物理における，いわゆる **(形式的) 摂動法** (perturbation method) である．係数 E_j とベクトル ψ_j $(j \geq 1)$ は固有ベクトル方程式 $T(\lambda)\psi(\lambda) = E(\lambda)\psi(\lambda)$ に上の展開式を形式的に代入することにより決めていく．しかし，この方法が数学的に厳密な意味をもちうるのは，T_0, $T_1(\lambda)$ が，ある意味でかなり狭い範疇の作用素のクラスに属する場合に限られる[9]．形式的摂動法を文字どおり形式的に適用すると間違った結果に導かれることがある．

(12.34b) および

$$E_0(H_T(\lambda g)) = \lambda^2 E_T(g)$$

という事実は，条件 (12.31) のもとで，$T_0 = d\Gamma_{\rm b}(T)$, $T_1(\lambda) = \Phi_{\rm S}(\lambda g) = \lambda\Phi_{\rm S}(g)$ として，$T(\lambda) = H_T(\lambda g)$ の基底状態に対して，形式的摂動法が数学的に意味をもつことを示すものである．

12-4 節　スペクトル特性 (II) — $g \notin D(T^{-1})$ の場合

定理 12-6 は，付加条件 (12.31) のもとで成立している．では，この条件が成立しない場合，すなわち，

$$g \notin D(T^{-1}) \tag{12.35}$$

の場合はどうなるであろうか．次にこの問題を考察する．

定理 12-7　(12.17) をを仮定する[10]．このとき，

$$\sigma(H_T(g)) = \sigma(d\Gamma_{\rm b}(T)) + E_T(g)$$

が成立する．

証明　ボレル集合 B に対して χ_B を B の定義関数とし，作用素 $\chi_B(T)$ を考える．T

---

[9] Kato (1976) や Reed and Simon (1978) の Chapter 12 を参照.

[10] ここでは，まだ (12.35) は仮定しない．

のスペクトル測度を E_T とすれば，$\chi_B(T) = E_T(B)$ が成り立つ[11]．任意の $a > 0$ に対して，

$$\chi_{[a,\infty)}(T)g \in D(T^{-1}) \tag{$*$}$$

である．そこで，$H_T(g)$ をわずかに変形した作用素

$$H_a := H_T(\chi_{[a,\infty)}(T)g) \tag{12.36}$$

を導入する．$(*)$ により，

$$U_a := e^{-i\Phi_S(iT^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g)} \tag{12.37}$$

が定義される．定理 12-6 (i) で，g のかわりに $\chi_{[a,\infty)}(T)g$ を考えることにより，

$$U_a\hat{H}_aU_a^{-1} = d\Gamma_b(T) \tag{12.38}$$

が成立する．ただし，

$$\hat{H}_a := H_a - E_T(\chi_{[a,\infty)}(T)g).$$

さて，$\lambda \in \sigma(d\Gamma_b(T))$ としよう．自己共役作用素のスペクトルの一般的性質[12]により，点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty \subset D(d\Gamma_b(T))$ で

$$\|\Psi_n\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \|(d\Gamma_b(T) - \lambda)\Psi_n\| = 0 \tag{$**$}$$

をみたすものが存在する．そこで，$\Phi_{n,a} := U_a^{-1}\Psi_n$ とおけば，$\|\Phi_{n,a}\| = 1$ であり，

$$\lim_{n\to\infty} (\hat{H}_a - \lambda)\Phi_{n,a} = 0 \tag{$***$}$$

となる．いま，

$$H_T(g) - E_T(g) - \lambda = \hat{H}_a - \lambda + \Phi_S(\chi_{[0,a)}(T)g) - E_T(\chi_{[0,a)}(T)g)$$

と書けることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\|\,(H_T(g) - E_T(g) - \lambda)\Phi_{n,a}\,\| &\le \|\,(\hat{H}_a - \lambda)\Phi_{n,a}\,\| \\ &\quad + \|\,\Phi_S(\chi_{[0,a)}(T)g)\Phi_{n,a}\,\| + |E_T(\chi_{[0,a)}(T)g)|.\end{aligned}$$

ここで，定理 4-39 を用いると，

$$\Phi_S(\chi_{[0,a)}(T)g)\Phi_{n,a} = U_a^{-1}\Phi_S(\chi_{[0,a)}(T)g)\Psi_n$$

---

[11] 新井 (1997a) の 3 章，3.4 節，3.4.2 項を参照.

[12] 新井 (1997a) の p.102，定理 2.31.

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi_{\mathrm{S}}(\chi_{[0,a)}(T)g)\Phi_{n,a}\| \\
&= \|\Phi_{\mathrm{S}}(\chi_{[0,a)}(T)g)\Psi_n\| \\
&\le \sqrt{2}\|T^{-1/2}\chi_{[0,a)}(T)g\|\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi_n\| + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\chi_{[0,a)}(T)g\| \\
&\le \sqrt{2}\|T^{-1/2}\chi_{[0,a)}(T)g\|\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi_n\|^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\chi_{[0,a)}(T)g\|.
\end{aligned}
$$

(**) より，$C := \sup_{n\ge 1}\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi_n\| < \infty$．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\|(H_T(g) - E_T(g) - \lambda)\Phi_{n,a}\| \\
&\le \|(\hat{H}_a - \lambda)\Phi_{n,a}\| \\
&\quad + \sqrt{2}C^{1/2}\|T^{-1/2}\chi_{[0,a)}(T)g\| + \frac{1}{\sqrt{2}}\|\chi_{[0,a)}(T)g\| + |E_T(\chi_{[0,a)}(T)g)|.
\end{aligned}
$$

作用素解析により，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{a\to 0}\|T^{-1/2}\chi_{[0,a)}(T)g\| = 0, \quad \lim_{a\to 0}\|\chi_{[0,a)}(T)g\| = 0, \\
&\lim_{a\to 0} E_T(\chi_{[0,a)}(T)g) = 0
\end{aligned}
$$

がわかる．したがって，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$a_m > 0$ があって，

$$
\|T^{-1/2}\chi_{[0,a_m)}(T)g\| < \frac{1}{m},\ \|\chi_{[0,a_m)}(T)g\| < \frac{1}{m},\ |E_T(\chi_{[0,a_m)}(T)g)| < \frac{1}{m}
$$

が成り立つ．また，(∗∗∗) により，$n_m \in \mathbb{N}$ があって，$\|(H_{a_m} - \lambda)\Phi_{n_m,a_m}\| < 1/m$ が成り立つ．よって，

$$
\|\,(H_T(g) - E_T(g) - \lambda)\Phi_{n_m,a_m}\,\| \le \frac{C_1}{m}
$$

となる．ただし，C_1 は定数である．これは，

$$
\lim_{m\to\infty}\|\,(H_T(g) - E_T(g) - \lambda)\Phi_{n_m,a_m}\,\| = 0
$$

を意味するから，$\lambda \in \sigma(H_T(g)) - E_T(g)$ である．ゆえに，

$$
\sigma(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) + E_T(g) \subset \sigma(H_T(g)). \tag{12.39}
$$

(12.39) の逆の包含関係を示すために，$\lambda \in \sigma(H_T(g) - E_T(g))$ としよう．任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ に対して，

$$\lim_{a\to 0}\hat{H}_a\Psi = [H_T(g) - E_T(g)]\Psi$$

が成り立つことに注意する．したがって，付録 B の定理 B-10 が応用できて，$\hat{H}_a$ は，$a \longrightarrow 0$ のとき，$H_T(g) - E_T(g)$ に強レゾルヴェント収束する．すると，付録 B の命題 B-9 によって，0 に収束する点列 $\{a_k\}_k$ と $\lambda_k \in \sigma(\hat{H}_{a_k})$ が存在して，$\lim_{k\to\infty}\lambda_k = \lambda$. 一方，定理 12-6 (ii) によって，$\sigma(\hat{H}_{a_k}) = \sigma(d\Gamma_{\rm b}(T))$ であるから，$\lambda_k \in \sigma(d\Gamma_{\rm b}(T))$. これとスペクトルが閉集合であることにより，$\lambda \in \sigma(d\Gamma_{\rm b}(T))$ が結論される．したがって，(12.39) の逆の包含関係が示された． □

次に $H_T(g)$ の固有値の存在について考察する，まず，いくつかの事実を証明する．

補題 12-8 $\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，H を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素，$X(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) を，稠密に定義された，$\mathscr{K}$ 上の線形作用素で次の性質をみたすものとする：

(X.1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$D(H) \subset D(X(t)) \cap D(X(t)^*)$ であり，すべての $\Psi \in D(H)$ に対して，変数 t のベクトル値関数 $X(t)e^{-itH}\Psi$, $X(t)^*\Psi$ は $\mathbb{R}$ 上で強連続である．

(X.2) $X(t)$ は $D(H)$ 上で弱微分可能である．すなわち，$D(H)$ を定義域に含む線形作用素 $X'(t)$ があって，任意の $\Phi, \Psi \in D(H)$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi, X(t)\Psi\rangle = \langle\Phi, X'(t)\Psi\rangle$$

が成り立つ．

このとき，任意の $\Phi, \Psi \in D(H)$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数

$$u(t) := \langle\Phi, e^{itH}X(t)e^{-itH}\Psi\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

は微分可能であり，

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= i\Big\{\langle He^{-itH}\Phi, X(t)e^{-itH}\Psi\rangle - \langle X(t)^*e^{-itH}\Phi, He^{-itH}\Psi\rangle\Big\}\\ &\quad + \langle\Phi, e^{itH}X'(t)e^{-itH}\Psi\rangle \qquad (12.40)\end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 12-6 作用素解析により，$e^{-itH}D(H) = D(H)$ であるから，$e^{itH}X(t)e^{-itH}\Psi$ ($\Psi \in D(H)$) は意味をもっている．

証明 $\Phi(t) = e^{-itH}\Phi$, $\Psi(t) = e^{-itH}\Psi$ とおく．$t \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．任意の $s \in$

$\mathbb{R}$ $(s \neq 0)$ に対して，$e^{-i(t+s)H} = e^{-isH}e^{-itH}$ を用いると，

$$\frac{u(t+s)-u(t)}{s} = \left\langle \left(\frac{e^{-isH}-1}{s}\right)\Phi(t), X(t+s)\Psi(t+s)\right\rangle + \left\langle X(t+s)^*\Phi(t), \left(\frac{e^{-isH}-1}{s}\right)\Psi(t)\right\rangle + \left\langle \Phi(t), \left(\frac{X(t+s)-X(t)}{s}\right)\Psi(t)\right\rangle \qquad (12.41)$$

と変形できる．$\Phi(t), \Psi(t) \in D(H)$ であるから，

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{-isH}-1}{s}\right)\Phi(t) = -iH\Phi(t), \quad \lim_{s\to 0}\left(\frac{e^{-isH}-1}{s}\right)\Psi(t) = -iH\Psi(t).$$

この事実と仮定 (X.1), (X.2) を使えば，$s \longrightarrow 0$ のとき，(12.41) の右辺は (12.40) の右辺に収束することがわかる． □

補題 12-9 $f \in D(T^{-1/2}), \Psi \in D(H_T(g))$ とする．このとき：

(i) $\mathbb{R}$ 上のベクトル値関数：$t \longrightarrow A(e^{-itT}f)^\sharp\Psi$ は強連続である．

(ii) $\mathbb{R}$ 上のベクトル値関数：$t \longrightarrow A(e^{-itT}f)^\sharp e^{-itH_T(g)}\Psi$ は強連続である．

証明 (i) $F(t) := A(e^{-itT}f)\Psi$, $f(t) := e^{-itT}f$ とおくと，

$$F(t+s) - F(t) = A((e^{-isT}-1)f(t))\Psi.$$

作用素解析により，$(e^{-isT}-1)f(t) \in D(T^{-1/2})$．したがって，命題 4-24 によって，

$$\|F(t+s) - F(t)\| \leq \| T^{-1/2}(e^{-isT}-1)f(t)\| \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|.$$

再び，作用素解析により，

$$\| T^{-1/2}(e^{-isT}-1)f(t)\| = \|(e^{-isT}-1)T^{-1/2}f(t)\| \longrightarrow 0, \quad s \longrightarrow 0.$$

したがって，$\lim_{s\to 0} F(t+s) = F(t)$．ゆえに，$F$ は強連続である．$A(e^{-itT}f)^*\Psi$ についても同様．

(ii) $G(t) := A(e^{-itT}f)e^{-itH_T(g)}\Psi$, $\Psi(t) := e^{-itH_T(g)}\Psi$ とおくと，

$$G(t+s) - G(t) = [A(e^{-isT}f(t)) - A(f(t))]\Psi(t) + A(e^{-isT}f(t))(e^{-isH_T(g)}-1)\Psi(t)$$

と変形できる．(i) により，$\lim_{s\to 0}[A(e^{-isT}f(t))-A(f(t))]\Psi(t)=0$．命題 4-24 によって，

$$\begin{aligned}&\| A(e^{-isT}f(t))(e^{-isH_T(g)}-1)\Psi(t)\| \\ &\le \|T^{-1/2}f\|\,\| d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}(e^{-isH_T(g)}-1)\Psi(t)\|.\end{aligned}$$

ここで，作用素解析からしたがう事実：$\|T^{-1/2}e^{-isT}f(t)\|=\|T^{-1/2}f\|$ を用いた．定理 12-2 (iii) と作用素解析を使えば，

$$\begin{aligned}\| d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}(e^{-isH_T(g)}-1)\Psi(t)\| &\le c_1\|(e^{-isH_T(g)}-1)(H_T(g)+M)^{1/2}\Psi(t)\| \\ &\quad + c_2\|(e^{-isH_T(g)}-1)\Psi(t)\|.\end{aligned}$$

ここで，c_1, c_2 は正の定数である．右辺は，$s\longrightarrow 0$ のとき，0 に収束する．したがって，

$$\lim_{s\to 0}A(e^{-isT}f(t))(e^{-isH_T(g)}-1)\Psi(t)=0.$$

よって，$\lim_{s\to 0}G(t+s)=G(t)$．$A(e^{-itT}f)^*e^{-itH_T(g)}\Psi$ の強連続性も同様にして証明される． □

各 $f\in D(T^{-1/2})$ に対して，作用素

$$A_{T,g}(f):=A(f)+\frac{1}{\sqrt{2}}\langle T^{-1/2}f,T^{-1/2}g\rangle \tag{12.42}$$

を導入する．

定理 12-10

(i) 任意の $t\in\mathbb{R}$ と $f\in D(T^{-1/2})$ と $\Psi\in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ に対して，

$$e^{itH_T(g)}A_{T,g}(f)e^{-itH_T(g)}\Psi=A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi, \tag{12.43a}$$

$$e^{itH_T(g)}A_{T,g}(f)^*e^{-itH_T(g)}\Psi=A_{T,g}(e^{itT}f)^*\Psi. \tag{12.43b}$$

(ii) $g\in D(T^{-1})$ としよう．このとき，任意の $t\in\mathbb{R}$ と $f\in D(T^{-1/2})$ に対して，

$$A_{T,g}(f)\Omega_T(g)=0.$$

証明 (i) Ψ, $\Phi\in D(H_T(g))=D(d\Gamma_{\rm b}(T))$, $f\in D(T^{-1/2})\cap D(T)$ とし，

$$v(t):=\langle\Phi,e^{itH_T(g)}A_{T,g}(e^{-itT}f)e^{-itH_T(g)}\Psi\rangle$$

とおく．補題 4-49，補題 12-9 および補題 12-8 によって，$v(t)$ は微分可能であり，

$$\frac{dv(t)}{dt}=i\Big(\langle H_T(g)e^{-itH_T(g}\Phi,A_{T,g}(e^{-itT}f)e^{-itH_T(g)}\Psi\rangle$$

$$- \langle A_{T,g}(e^{-itT}f)^* e^{-itH_T(g)}\Phi, H_T(g)e^{-itH_T(g)}\Psi\rangle\Big)$$
$$+ \langle \Phi, e^{itH_T(g)} A_{T,g}(-iTe^{-itT}f)e^{-itH_T(g)}\Psi\rangle.$$

定理 12-2 (v) によって，右辺は 0 になることがわかる．したがって，$v(t) = v(0) = \langle \Phi, A_{T,g}(f)\Psi\rangle$．ゆえに，

$$e^{itH_T(g)} A_{T,g}(e^{-itT}f)e^{-itH_T(g)}\Psi = A_{T,g}(f)\Psi.$$

$e^{-itT}D(T^{-1/2}) = D(T^{-1/2})$ であるから，$e^{-itT}f$ をあらためて f とすることにより，(12.43a) を得る．

次に (12.43a) を任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ に拡張する．$D(d\Gamma_{\rm b}(T))$ は $d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}$ の芯であるから，

$$\Psi_n \longrightarrow \Psi, \quad d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}\Psi_n \longrightarrow d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}\Psi, \quad n \longrightarrow \infty$$

となる $\Psi_n \in D(d\Gamma_{\rm b}(T))$ がある．前半の結果より，

$$A_{T,g}(f)e^{-itH_T(g)}\Psi_n = e^{-itH_T(g)}A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi_n.$$

命題 4-24 を使えば，$\{A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi_n\}_n$ はコーシー列であり，$A_{T,g}$ の閉性により，$A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi$ に収束することがわかる．したがって，$A_{T,g}(f)e^{-itH_T(g)}\Psi_n \longrightarrow e^{-itH_T(g)}A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．明らかに，$e^{-itH_T(g)}\Psi_n \longrightarrow e^{-itH_T(g)}\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$．したがって，$e^{-itH_T(g)}\Psi \in D(A_{T,g})$ かつ $A_{T,g}(f)e^{-itH_T(g)}\Psi = e^{-itH_T(g)}A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi$ を得る．ゆえに，(12.43a) が成立する．(12.43b) は (12.43a) の共役を考えることにより導かれる．この場合，定義域の問題については，$D(|H_T(g)|^{1/2}) = D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ (定理 12-2 (iv)) により，$e^{-itH_T(g)}D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}) = D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ であることに注意せよ．

$f \in D(T^{-1/2})$, $f \notin D(T)$ の場合については，まず，作用素解析により，$\{f_n\}_n \subset D(T^{-1/2}) \cap D(T)$ で，$f_n \longrightarrow f$, $T^{-1/2}f_n \longrightarrow T^{-1/2}f$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるものがとれることに注意する (たとえば，$f_n = \chi_{[0,n]}(T)f$)．前半の結果より，(12.43a) で f を f_n で置き換えた式が成立する．命題 4-24 を用いることにより，任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ に対して $A_{T,g}(f_n)e^{-itH_T(g)}\Psi \longrightarrow A_{T,g}(f)e^{-itH_T(g)}\Psi$, $A_{T,g}(e^{itT}f_n)\Psi \longrightarrow A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ を示すことができる．したがって，いまの場合も (12.43a) が得られる．(12.43b) についても同様 ((12.43a) の共役を考察してもよい)．

(ii) 定理 4-39 によって，

$$A_{T,g}(f) = e^{i\Phi_{\rm S}(iT^{-1}g)}A(f)e^{-i\Phi_{\rm S}(iT^{-1}g)}. \tag{12.43c}$$

これと (12.34a) により，題意がしたがう．　□

次の補題は重要な事実の 1 つである．

補題 12-11　T は絶対連続であるとする[13)]．このとき，すべての $f \in D(T^{-1/2})$ と $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\lim_{t \to \pm\infty} A(e^{itT} f)\Psi = 0. \tag{12.44}$$

証明　まず，$\Psi = A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}$ ($f_j \in \mathscr{H}$, $j = 1, \cdots, n$) の形のベクトルについて示す．実際，この場合，

$$A(e^{itT} f)\Psi = \sum_{j=1}^{n} \langle e^{itT} f, f_j \rangle A(f_1)^* \cdots \widehat{A(f_j)^*} \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}$$

と付録 B の定理 B-6 の応用から得られる事実 $\lim_{t \to \pm\infty} \langle e^{itT} f, f_j \rangle = 0$ によって，(12.44) が成立する．

稠密な部分空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ は $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ の芯であるから，$D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ の芯である．したがって，任意の $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\Psi_n \longrightarrow \Psi, \quad d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi_n \longrightarrow d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi$$

($n \longrightarrow \infty$) となる $\Psi_n \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ が存在する．$\|A(e^{itT} f)\Psi\|$ は次のように評価できる：

$$\begin{aligned}\| A(e^{itT} f)\Psi \| &\le \| A(e^{itT} f)(\Psi - \Psi_n) \| + \| A(e^{itT} f)\Psi_n \| \\ &\le \| T^{-1/2} f \| \, \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}(\Psi - \Psi_n) \| + \| A(e^{itT} f)\Psi_n \|.\end{aligned}$$

これと前段の結果により，

$$\overline{\lim_{t \to \pm\infty}} \| A(e^{itT} f)\Psi \| \le \| T^{-1/2} f \| \, \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}(\Psi - \Psi_n) \|.$$

そこで，$n \longrightarrow \infty$ とすれば，$\overline{\lim}_{t \to \pm\infty} \|A(e^{itT} f)\Psi\| = 0$，すなわち，(12.44) を得る．□

定理 12-12　(12.17), (12.35) を仮定し，さらに T は絶対連続であるとする．このとき，$H_T(g)$ は固有ベクトルをもたない．特に，$H_T(g)$ の基底状態は存在しない．

注意 12-7　自明のことだが，(12.35) のもとでは $g \neq 0$ である．この定理の結果は，$H_T(\lambda g)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) の基底状態に対して，形式的摂動法が破綻していることを示している．

---

13) 自己共役作用素の絶対連続性については，付録 B-2 を参照．

証明　$H_T(g)$ が固有値 $E \in \mathbb{R}$ をもつとし，その固有ベクトルの 1 つを $\Psi_E = \{\Psi_E^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \neq 0$ とする：$H_T(g)\Psi_E = E\Psi_E$．このとき，定理 12-10 によって，すべての $f \in D(T^{-1/2})$ に対して，

$$e^{it(H_T(g)-E)}A_{T,g}(f)\Psi_E = A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi_E.$$

したがって，

$$\| A_{T,g}(f)\Psi_E \| = \| A_{T,g}(e^{itT}f)\Psi_E \|.$$

補題 12-11 によって，右辺は，$t \longrightarrow \pm\infty$ のとき，0 に収束するので，$A_{T,g}(f)\Psi_E = 0$ である．これは，

$$A(f)\Psi_E = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle T^{-1/2}f, T^{-1/2}g\rangle\Psi_E$$

を意味する．$\Psi_E \neq 0$ より，ある番号 n があって，$\Psi_E^{(n)} \neq 0$．したがって，$c_n := \|\Psi_E^{(n)}\|^2$ とすれば，$c_n \neq 0$ であり，

$$\langle\Psi_E^{(n)}, A(f)\Psi_E\rangle = -\frac{c_n}{\sqrt{2}}\langle T^{-1/2}f, T^{-1/2}g\rangle.$$

一方，$F(f) := \langle A(f)\Psi_E, \Psi_E^{(n)}\rangle$ $(f \in D(T^{-1/2}))$ とおけば，

$$\begin{aligned}\|F(f)\| &\leq \|A(f)^*\Psi_E^{(n)}\|\,\|\Psi_E\| \leq \|f\|\,\|(N+1)^{1/2}\Psi_E^{(n)}\|\,\|\Psi_E\| \\ &= \sqrt{n+1}\,\|f\|\,\|\Psi_E\|^2.\end{aligned}$$

したがって，F は $D(T^{-1/2})$ を定義域とする，$\mathscr{H}$ 上の有界な線形汎関数である．したがって，リースの表現定理により，$F(f) = \langle u, f\rangle$ $(f \in D(T^{-1/2}))$ をみたすベクトル $u \in \mathscr{H}$ がただ 1 つ存在する．ゆえに，

$$\langle f, u\rangle = -\frac{c_n}{\sqrt{2}}\langle T^{-1/2}f, T^{-1/2}g\rangle, \quad f \in D(T^{-1/2}).$$

これは，$T^{-1/2}g \in D(T^{-1/2})$ — したがって，$g \in D(T^{-1})$ — かつ $T^{-1}g = -\sqrt{2}u/c_n$ を意味する．だが，これは仮定 (12.35) に反する．　□

定理 12-6 と定理 12-12 から次の事実が導かれる．

定理 12-13　(12.17) を仮定し，T は絶対連続であるとする．このとき，$H_T(g)$ が基底状態をもたないための必要十分条件は (12.35) が成り立つことである．

定理 12-12 あるいは定理 12-13 は次に述べる意味でたいへん興味深い．(12.17) を

仮定し，T は絶対連続であるとしよう．このとき，無摂動ハミルトニアン $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の固有値は 0 だけであり，これは $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の基底状態エネルギーである (定理 4-14 の応用)．(12.35) も仮定しよう．このとき，定理 12-10 は，無摂動ハミルトニアン $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の固有値 0 が摂動 $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ のもとで消えてしまい，安定ではないことを意味する．つまり，いまの場合，無摂動ハミルトニアンの基底状態は摂動 $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ のもとで安定ではない．こうして，条件 (12.35) がみたされる場合，ハミルトニアン $H_T(g)$ は，線形作用素の摂動論の文脈では (12-2-2 項を参照)，無摂動作用素 T_0 が基底状態をもち，摂動を受けた作用素 $T(\lambda)$ が下に有界であっても，$T(\lambda)$ の基底状態が存在しないような例をあたえる．

定理 12-13 は $H_T(g)$ の基底状態の非存在に対する完全な特徴づけをあたえる．

12-5 節　基底状態の非存在の物理的対応 — 赤外カタストローフ

定理 12-12 によって確立された，$H_T(g)$ の基底状態の非存在が，場の量子論の文脈において，いかなる物理的意味をもつかを考えてみよう．

12-5-1　赤外特異条件

(12.17), (12.35) を仮定する．T のスペクトル測度を E_T とすれば，(12.35) は

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_T(\lambda)g\|^2 = \infty \tag{12.45}$$

と同値である．

$\mathrm{supp}\, E_T = \sigma(T)$ であるから，(12.45) は，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\sigma(T) \cap (0, \delta) \neq \varnothing \tag{12.46}$$

を導く[14]．これは，$0 \in \sigma(T)$ であり，0 は $\sigma(T)$ の集積点になっていることを意味する．

容易にわかるように，

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_T(\lambda)g\|^2 \le \|E_T([1,\infty))g\|^2 < \infty$$

---

[14] もし，ある $\delta_0 > 0$ が存在して，$\sigma(T) \cap (0, \delta_0) = \varnothing$ ならば，$\sigma(T) \subset [\delta_0, \infty)$ (T は単射であるから，0 は T のスペクトルの孤立点，すなわち，T の固有値にはなり得ない)．したがって，

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_T(\lambda)g\|^2 = \int_{[\delta_0,\infty)} \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_T(\lambda)g\|^2 \le \frac{1}{\delta_0^2}\|g\|^2 < \infty$$

となって (12.45) に反する．

であるから，(12.46) は

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_T(\lambda)g\| = \infty \tag{12.47}$$

と同値である．

さて，T は絶対連続であるとしよう．すると，ラドン-ニコディムの定理により，非負値関数 $f_{T,g} \in L^1(\mathbb{R})$ が存在して，すべての $B \in \boldsymbol{B}^1$ に対して，

$$\|E_T(B)g\|^2 = \int_B f_{T,g}(\lambda)\, d\lambda$$

とかける．したがって，(12.47) は，

$$\int_{[0,1)} \frac{f_{T,g}(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda = \infty \tag{12.48}$$

と書き直せる．一方，任意の $\varepsilon \in (0,\delta)$ に対して $(\delta > 0)$,

$$\int_{[\varepsilon,\delta)} \frac{f_{T,g}(\lambda)}{\lambda^2}\, d\lambda \le \frac{1}{\varepsilon^2}\| E_T([\varepsilon,\delta))g \|^2 < \infty$$

である．したがって，(12.48) は関数 $f_{T,g}(\lambda)/\lambda^2$ が，$\lambda = 0$ において特異であることを示す．

場の量子論への応用を念頭において，T を 1 粒子 (ボソン) のハミルトニアンと解釈してみよう (以下，物理的な表現を用いるときは，この解釈を前提とする)．このとき，(12.46) は，この粒子がいくらでも 0 に近いエネルギーをとりうることを意味する．他方，エネルギースペクトルにおける 0 の近傍は波数空間では，波長の長い領域 — これを**赤外領域** (infrared region) とよぶ — に対応する[15]．そこで，(T が絶対連続であるか否かに関わらず) ある定数 $\gamma > 0$ に対して，

$$\int_{[0,\gamma)} \frac{1}{\lambda^2}\, d\|E_T(\lambda)g\|^2 = \infty \tag{12.49}$$

が成り立つとき，(T,g) は**赤外特異条件** (infrared singularity condition) にしたがうという．この場合，容易にわかるように，$g \notin D(T^{-1})$ である．したがって，定理 12-13 は次のように言い換えられる：

T は絶対連続，g は (12.17) をみたすとする．このとき，$H_T(g)$ が基底状態をもたないための必要十分条件は．(T,g) が赤外特異条件にしたがうことである．

---

[15] たとえば，質量 0 の相対論的自由粒子が波数ベクトル $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ をもつ場合のエネルギーは $|\boldsymbol{k}|$ であるから，波長 $\lambda = 2\pi/|\boldsymbol{k}|$ は，$|\boldsymbol{k}|$ が小さくなれば大きくなる．

12-5-2 赤外的 van Hove-宮武現象

(12.17) がみたされるとしよう．任意の $a>0$ に対して，(12.36) によって定義される作用素 H_a を**赤外切断 a の入った抽象的 van Hove モデル**とよぶ．(12.38) により，H_a は基底状態

$$\Omega_a := U_a^{-1}\Omega_{\mathscr{H}} \tag{12.50}$$

を一意的にもつ．定理 12-7 の証明で見たように，H_a は，$a \longrightarrow 0$ のとき，$H_T(g)$ に強レゾルヴェント収束する．しかし，(12.35) がみたされ，T が絶対連続である場合，$H_T(g)$ は基底状態をもたない (定理 12-12)．では，Ω_a は $a \longrightarrow 0$ のとき，どのように振る舞うのであろうか．この自然な疑問に答えるのが次の定理である．

定理 12-14 (12.17) を仮定する．このとき，すべての $\Psi \in \mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ に対して

$$\lim_{a\to 0}\langle \Psi, \Omega_a\rangle = 0,$$

すなわち，$\text{w-}\lim_{a\to 0}\Omega_a = 0$ (w-lim は弱極限を表す) であるための必要十分条件は (12.35) がみたされることである．

証明 任意の $f_1,\cdots,f_n \in \mathscr{H}$ に対して，命題 4-54 と (4.110) により

$$\begin{aligned}&\langle A(f_1)^*\cdots A(f_n)^*\Omega_{\mathscr{H}}, \Omega_a\rangle \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}^n}\, e^{-\|T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g\|^2/4}\prod_{j=1}^n \langle f_j, T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g\rangle.\end{aligned} \tag{12.51}$$

(必要性) $\text{w-}\lim_{a\to 0}\Omega_a = 0$ とする．(12.51) で $n=0$ の場合 (すなわち，$\langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Omega_a\rangle$) を考えると，

$$\lim_{a\to 0} e^{-\|T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g\|^2/4} = 0.$$

これは，

$$\lim_{a\to 0}\| T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g\|^2 = \infty \tag{12.52}$$

を意味する．したがって，$g \notin D(T)^{-1}$.

(十分性) (12.35) が成立するとする．したがって，(12.52) が成り立つ．(12.51) から，

$$|\langle A(f_1)^*\cdots A(f_n)^*\Omega_{\mathscr{H}}, \Omega_a\rangle|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}^n}\| T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g\|^n e^{-\|T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g\|^2/4}\prod_{j=1}^n \|f_j\|.$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$ であるから，上の評価より，

$$\lim_{a\to 0}\langle A(f_1)^* \cdots A(f_n)^* \Omega_{\mathscr{H}}, \Omega_a\rangle = 0$$

がしたがう．これと内積の線形性により，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T^{-1/2}))$ に対して，$\lim_{a\to 0}\langle \Psi, \Omega_a\rangle = 0$ が成立することになる．$\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T^{-1/2}))$ は稠密であり，$\sup_{a>0}\|\Omega_a\| = 1$ であるから，付録 A の命題 A-1 を応用することにより，w- $\lim_{a\to 0}\Omega_a = 0$ が導かれる．
□

定理 12-14 は次のこと意味する：条件 (12.35) が加わると，H_a の基底状態 Ω_a は，$a \longrightarrow 0$ のとき，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の中に極限をもたない．$a \longrightarrow 0$ の極限は，物理的には，赤外切断を除く極限に対応する．したがって，定理 12-14 は，当該の仮定のもとで，赤外切断の入ったハミルトニアンの基底状態は，赤外切断を除く極限において，ボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ の中に収束しない，と言い換えられる．この種の現象を**赤外的 van Hove-宮武現象**とよぶ[16)]．

この現象は，注意 12-7 で言及した，$H_T(\lambda g)$ の基底状態に関する形式的摂動法の破綻を引き起こす，ある種の構造を示している．

赤外的 van Hove-宮武現象をハミルトニアン以外の物理量を用いて見てみよう．

(12.17) を仮定する．このとき，補題 12-5 の N_{b} に関する事実から，任意の $a > 0$ に対して，$\Omega_a \in D(N_{\mathrm{b}})$ であり，

$$\langle \Omega_a, N_{\mathrm{b}}\Omega_a\rangle = \frac{1}{2}\| T^{-1}\chi_{[a,\infty)}(t)g\|^2 \qquad (12.53)$$

がわかる．これから容易に次の事実か導かれる．

命題 12-15 (12.17) を仮定する．このとき，

$$\lim_{a\to 0}\langle \Omega_a, N_{\mathrm{b}}\Omega_a\rangle = \infty. \qquad (12.54)$$

であるための必要十分条件は，(12.35) が成立することである．

(12.54) は，赤外切断のある基底状態 Ω_a におけるボソンの個数の期待値が赤外切断

---

16)「van Hove-宮武現象」はもともと，後に述べる波長の短い領域における，この種の現象を表すが，ここでは，この概念を,「赤外的」という修飾語をつけて，波長の長い領域に対しても流用する．この命名は，この本で初めて著者が使用するものであり，標準的でないことをお断りしておく．

を除く極限で無限大に発散することを示している．

この結果をもう少し詳細に見るために，各 $E>0$ に対して，作用素 $N_E(T)$ を

$$N_E(T) := d\Gamma_{\rm b}(\chi_{[0,E]}(T)) \tag{12.55}$$

によって定義する．これは，物理的には，1 粒子ハミルトニアンが T によって記述される無限ボソン系における，エネルギーが E 以下のボソンの個数を表す作用素である．補題 12-5 の応用により (そこでの T を $\chi_{[0,E]}(T)$，f を $-iT^{-1}\chi_{[a,\infty)}(T)g$ とせよ)，

$$\langle \Omega_a, N_E(T)\Omega_a\rangle = \frac{1}{2}\|T^{-1}\chi_{[a,E]}(T)g\|^2. \tag{12.56}$$

ただし，$a<E$ とした．したがって，

$$\langle \Omega_a, [N_{\rm b} - N_E(T)]\Omega_a\rangle = \frac{1}{2}\|T^{-1}\chi_{(E,\infty)}(T)g\|^2, \quad a<E. \tag{12.57}$$

(12.35) と

$$\lim_{a\to 0}\|T^{-1}\chi_{[a,E]}(T)g\|^2 = \infty \tag{12.58}$$

は同値であるから，次の結果が得られる．

命題 12-16 仮定 (12.17) のもとで，任意の $E>0$ に対して，

$$\lim_{a\to\infty}\langle \Omega_a, N_E(T)\Omega_a\rangle = \infty$$

であるための必要十分条件は (12.35) が成立することである．

こうして，上述の発散はエネルギーが小さな (波長の長い) ボソン — **柔らかいボソン** (soft boson) という — によって引き起こされていることがわかる．この種の発散は，場の量子論の文脈では，**赤外発散** (infrared divergence) あるいは**赤外カタストローフ**とよばれる．これはボソンのエネルギーが 0 までとりうるような系 ((12.46) を参照) に特有の現象である．たが，赤外発散が起こるか否かは相互作用を決めるベクトル g の，T^{-1} に関する定義域特性に依存していることに注意されたい．

12-6 節 一般的 van Hove-宮武現象

前節の赤外的 van Hove-宮武現象は，実はもっと一般的な数理現象の特別な場合としてとらえることができる．これを定式化したのが次に述べる定理である．$g_\kappa \in D(T^{-1})$ $(\kappa>0)$ とする．このとき，定理 12-6 によって，$H_T(g_\kappa)$ は一意的な基底状態をもち，それは定数倍を除いて，$\Omega_T(g_\kappa)$ であたえられる ((12.34a) を参照)．

定理 12-17 $g_\kappa \in D(T^{-1})$ $(\kappa > 0)$ とする．このとき，

$$\text{w-}\lim_{\kappa\to\infty} \Omega_T(g_\kappa) = 0 \tag{12.59}$$

であるための必要十分条件は

$$\lim_{\kappa\to\infty} \| T^{-1} g_\kappa \| = \infty \tag{12.60}$$

が成立することである．

証明 定理 12-14 の証明と同様：そこでの証明において，$\chi_{[a,\infty)}(T)g$ を g_κ で置き換えればよい． □

(T, g) が赤外特異条件にしたがうならば，$g_\kappa = \chi_{[1/\kappa,\infty)}(T)g$ として，(12.60) がみたされることはすでに見た．これ以外の重要な場合を見ておこう．

例 12-5 (T, g) に関して，赤外特異性が起こらない状況で考えるために，T は厳密に正の自己共役作用素であるとする．すなわち，ある定数 $\gamma > 0$ があって，$T \geq \gamma$ が成り立つとする (したがって，$D(T^{-1}) = \mathscr{H}$ であって，T^{-1} は有界)．さらに，T は非有界であるとする．ある自然数 n_0 に対して，$v \notin D(T^{n_0})$ をみたすベクトル v を 1 つ固定し，

$$g_\kappa := T^{n_0+1} \chi_{[0,\kappa]}(T) v, \quad \kappa > 0,$$

とおく ($\chi_{[0,\kappa]}(T)v \in C^\infty(T)$ に注意)．このとき，

$$\|T^{-1} g_\kappa\|^2 = \int_{[0,\kappa]} \lambda^{2n_0}\, d\|E_T(\lambda)v\|^2 \longrightarrow \infty, \quad \kappa \longrightarrow \infty. \tag{12.61}$$

ここで，$v \notin D(T^{n_0})$ を用いた．

この例では，$\lim_{n\to\infty} \kappa_n = \infty$ をみたす，いかなる部分列 $\{\kappa_n\}_n$ をとっても，$\{g_{\kappa_n}\}_n$ は $\mathscr{H}$ の中で弱収束しないことに注意しよう．実際，もし，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} g_{\kappa_n} = g \in \mathscr{H}$ であるならば，$T^{-(n_0+1)}$ の有界性により，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} T^{-(n_0+1)} g_{\kappa_n} = T^{-(n_0+1)} g$．一方，$g_{\kappa_n}$ の定義から，$T^{-(n_0+1)} g_{\kappa_n} \longrightarrow v$ $(n \longrightarrow \infty)$．したがって，$v = T^{-(n_0+1)} g$．ゆえに，$v \in D(T^{n_0+1}) \subset D(T^{n_0})$．だが，これは矛盾である．

いま，示した事実は，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(T))$ に対して，$\{\Phi_{\mathrm{S}}(g_\kappa)\Psi\}_\kappa$ は弱収束する部分列さえ含まないことを意味する．したがって，ベクトル $H_T(g_\kappa)\Psi$ は $\kappa \longrightarrow \infty$ において弱極限をもたない．こうして，この例では，赤外的 van Hove-宮武現象の場合と異なり，$\kappa \longrightarrow \infty$ に対応するハミルトニアンをボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ で

働く作用素として定義できないことが示唆される．

ところで，g_κ の収束の位相をもっと緩めるならば，実は，g_κ は収束することがわかる．これを見るために，$n>0$ に対して，$\mathscr{H}_{-n}(T)$ を 4 章，4-8 節，例 4-9 で導入したヒルベルト空間としよう．容易にわかるように，

$$\lim_{\kappa\to\infty} T^{-(n_0+1)}g_\kappa = v$$

であるから，g_κ は $\mathscr{H}_{-n_0-1}(T)$ のコーシー列である．したがって，$g\in\mathscr{H}_{-n_0-1}(T)$ があって，$\mathscr{H}_{-n_0-1}(T)$ において，$\lim_{\kappa\to\infty} g_\kappa = g$ が成立する．この場合，$g\notin\mathscr{H}$ である．

(12.61) からわかるように，g_κ にまつわる発散は，エネルギーの高い領域，言い換えれば波長の短い領域 — **紫外領域** — に由来することがわかる．そこで，この種の発散を**紫外発散**あるいは**紫外カタストローフ**とよぶ．いまの例の型の g_κ に対する (12.59) を抽象的な意味おける **(紫外的) van Hove-宮武現象**という．

12-7 節 van Hove-宮武現象と CCR の非同値表現

van Hove-宮武現象を量子力学の基本原理の 1 つである，CCR の表現論の観点から調べる[17]．

12-7-1 赤外的 van Hove-宮武現象の場合

$\mathscr{V}$ を $D(T)\cap D(T^{-1/2})$ に含まれる稠密な部分空間で $T^{-1/2}$ の芯になっているものとする．T^{-1} は非有界とし，(12.17) を仮定する．このとき，4 章，4-8 節で見たように，

$$\pi_{T,g} := \{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}),\, \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}),\, \{A_{T,g}(f)\,|\, f\in\mathscr{V}\}\} \tag{12.62}$$

は CCR の表現である．次の事実が成立する．

命題 12-18

(i) $\pi_{T,g}$ は，$g\in D(T^{-1})$ のとき，かつこのときに限り，フォック表現 $\pi_{\mathrm{F}}(\mathscr{V})$ に同値である．この場合，

$$A_{T,g}(f) = e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}A(f)e^{-i\Phi_{\mathrm{S}}(iT^{-1}g)}, \quad f\in\mathscr{H},$$

が成り立つ．

---

[17] 用語については，4 章，4-8 節を参照．

(ii) $\pi_{T,g}$ は T に関する第 2 量子化作用素をもち，それは $\mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V})$ 上で $H_T(g) - E_T(g)$ に等しい．

証明 (i) は 4 章，4-8 節，例 4-7 による．

(ii) は命題 4-64 から得られる． □

命題 12-18 (ii) から，抽象的 van Hove モデルのハミルトニアンの性質は，CCR の表現 $\pi_{T,g}$ の性質と密接に関連していることが予想される．この観点から，$H_T(g)$ の基底状態の非存在あるいは赤外的 van Hove-宮武現象を特徴づければ次のようになる．

(i) T は絶対連続であるとする．このとき，$H_T(g)$ の基底状態の非存在は，CCR の表現 $\pi_{T,g}$ が非同値表現になる場合と正確に対応している (定理 12-13 と命題 12-18 による)．

(ii) 赤外的 van Hove-宮武現象は，CCR の表現 $\pi_{T,g}$ が非同値表現になる場合と正確に対応している (定理 12-14 と命題 12-18 による)．

かくして，CCR の表現 $\pi_{T,g}$ の非同値性と，物理的に興味ある特徴的な現象が対応していることがわかる．

12-7-2 紫外的 van Hove-宮武現象の場合

T は $\mathscr{H}$ 上の厳密に正の自己共役作用素で非有界であるとする．$\mathscr{H}_{-n}(T)$ $(n \in \mathbb{N})$ を 4 章，4-8 節，例 4-9 で導入したヒルベルト空間とする．その定義から，任意の $\phi \in \mathscr{H}_{-n-1}(T)$ に対して，$\mathscr{H}$ の点列 $\{\phi_j\}_j$ で $\|\phi_j - \phi\|_{-n-1} \longrightarrow 0$ $(j \longrightarrow \infty)$ となるものがとれる．したがって，$\{T^{-n-1}\phi_j\}_j$ は $\mathscr{H}$ のコーシー列であるから，$\{T^{-1}\phi_j\}_j$ は $\mathscr{H}_{-n}(T)$ のコーシー列である．ゆえに，$\|T^{-1}\phi_j - f_\phi\|_{-n} \longrightarrow 0$ $(j \longrightarrow \infty)$ となる $f_\phi \in \mathscr{H}_{-n}(T)$ が存在する．ゆえに，対応 $\phi \longrightarrow f_\phi$ は $\mathscr{H}_{-n-1}(T)$ から $\mathscr{H}_{-n}(T)$ への写像を定める．この写像を $\hat{T}^{-1}$ と記す：

$$\hat{T}^{-1}\phi := f_\phi.$$

さて，ある自然数 n_0 に対して，$g \in \mathscr{H}_{-n_0-1}(T)$ とする (例 12-5 を参照)．$\mathscr{V}$ を $D(T^{n_0})$ に含まれる稠密な部分空間で T^{n_0} の芯となっているものとする．$w := \hat{T}^{-1}g \in \mathscr{H}_{-n_0}(T)$ とおく．すると，$w_j \in \mathscr{H}$ で $\|w_j - w\|_{-n_0} \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$ となるものが存在する．したがって，$\{T^{-n_0}w_j\}_j$ は $\mathscr{H}$ のコーシー列であるから，$u_g := \lim_{j\to\infty} T^{-n_0}w_j \in \mathscr{H}$ が存在する．これは，w に収束する列 $\{w_j\}_j$ のとりかたによらない．$D(T^{n_0})$ 上の線形汎関数 ℓ_g を

$$\ell_g(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_g, T^{n_0} f\rangle_{\mathscr{H}} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle w_j, f\rangle_{\mathscr{H}}, \quad f \in D(T^{n_0}) \qquad (12.63)$$

によって定義し，

$$B_{\ell_g}(f) := A(f) + \ell_g(f)^*, \quad f \in D(T^{n_0}), \qquad (12.64)$$

とする．このとき，

$$\hat{\pi}_{T,g} := \{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}), \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}), \{B_{\ell_g}(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\} \qquad (12.65)$$

は CCR の表現である．

例 12-6 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathscr{H} \times \mathscr{H}_n(T)$ 上の準双線形形式 $s_n(\phi, \psi)$ を

$$s_n(\phi,\psi) := \langle \phi, \psi\rangle_{\mathscr{H}} = \langle T^{-n}\phi, T^n\psi\rangle_{\mathscr{H}}, \quad \phi \in \mathscr{H}, \psi \in \mathscr{H}_n(T)$$

によって定義する．このとき，シュヴァルツの不等式により，$\|s_n(\phi,\psi)\| \le \|\phi\|_{-n}\|\psi\|_n$ であるから，s_n は有界である．$\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}_{-n}(T)$ で稠密であるから，s_n は $\mathscr{H}_{-n}(T) \times \mathscr{H}_n(T)$ 上の準双線形形式に一意的に拡大される．この拡大も同じ記号 s_n で書く．これを用いると，

$$\ell_g(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n_0}(\hat{T}^{-1}g, f)$$

と表される．したがって，$\ell_g(f)$ は g が $\mathscr{H}$ の元のときの，$\langle T^{-1}g, f\rangle_{\mathscr{H}}/\sqrt{2}$ の自然な一般化になっている．

次の事実も注意しておこう．任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\phi \in \mathscr{H}_{-n-1}(T)$ と $\psi \in \mathscr{H}_n(T)$ に対して，

$$s_n(\hat{T}^{-1}\phi, \psi) = s_{n+1}(\phi, T^{-1}\psi).$$

実際，ϕ_j を上述のものとすれば，s_n の連続性 (有界性) により，

$$\begin{aligned} s_n(\hat{T}^{-1}\phi,\psi) &= \lim_{j\to\infty} s_n(T^{-1}\phi_j, \psi) = \lim_{j\to\infty}\langle T^{-n-1}\phi_j, T^n\psi\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty} s_{n+1}(\phi_j, T^{-1}\psi) \\ &= s_{n+1}(\phi, T^{-1}\psi). \end{aligned}$$

命題 12-19 $\hat{\pi}_{T,g}$ がフォック表現に同値であるための必要十分条件は $\hat{T}^{-1}g \in \mathscr{H}$ となることである．

証明 (必要性) $\hat{\pi}_{T,g}$ がフォック表現に同値であるとする．このとき，定理 4-63 に

より，$h \in \mathscr{H}$ が存在して，$\ell_g(f) = \langle h, f\rangle_{\mathscr{H}}$ $(f \in \mathscr{V})$ が成り立つ．したがって，$u_g \in D(T^{n_0})$ かつ $T^{n_0}u_g = \sqrt{2}h$．ゆえに，$u_g = \sqrt{2}T^{-n_0}h$．したがって，$\|w_j - \sqrt{2}h\|_{-n_0} \longrightarrow 0$ $(j \longrightarrow \infty)$．ゆえに，$w = \sqrt{2}h \in \mathscr{H}$．

(十分性) $w = \hat{T}^{-1}g \in \mathscr{H}$ ならば，$\|T^{-n_0}w_j - T^{-n_0}w\| \longrightarrow 0$ $(j \longrightarrow \infty)$．したがって，$j \longrightarrow \infty$ のとき，任意の $f \in D(T^{n_0})$ に対して，$\langle w_j, f\rangle = \langle T^{-n_0}w_j, T^{n_0}f\rangle \longrightarrow \langle T^{-n_0}w, T^{n_0}f\rangle = \langle w, f\rangle$．ゆえに，$\ell_g(f) = \langle w/\sqrt{2}, f\rangle$．したがって，定理 4-63 により，$\hat{\pi}_{T,g}$ はフォック表現に同値である． □

命題 12-19 の対偶をとることにより，次の事実が示されたことになる．

命題 12-20　$\hat{\pi}_{T,g}$ がフォック表現に非同値であるための必要十分条件は $\hat{T}^{-1}g \notin \mathscr{H}$ となることである．

こうして，例 12-5 における紫外的 van Hove-宮武現象は，$\hat{\pi}_{T,g}$ が非同値表現となる場合と対応していることがわかる．

12-8 節　ハイゼンベルク場と物理的真空期待値

12-8-1　ハイゼンベルク場の陽な表示

抽象的自由ボース場の理論におけるハイゼンベルク場 — **自由なハイゼンベルク場**とよぶ — は

$$\Phi^{\mathrm{free}}(t, f) := e^{itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}\Phi_{\mathrm{S}}(f)e^{-itd\Gamma_{\mathrm{b}}(T)}, \quad f \in \mathscr{H}, \tag{12.66}$$

によって定義される．(4.102) によって，$D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ 上で

$$\Phi^{\mathrm{free}}(t, f) = \Phi_{\mathrm{S}}(e^{itT}f) \tag{12.67}$$

が成り立つ．

定理 12-10 に注目すると，(12.19) によって定義されるハイゼンベルク場 $\Phi(t, f)$ の陽な表示を導くことができる．

$A_{T,g}(f)$ $(f \in D(T^{-1/2}))$ を (12.42) によって定義される作用素とし，

$$\Phi_{T,g}(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{A_{T,g}(f)^* + A_{T,g}(f)\right\}, \quad f \in D(T^{-1/2}), \tag{12.68}$$

を導入する．陽に表せば，

$$\Phi_{T,g}(f) = \Phi_{\mathrm{S}}(f) + C_{T,g}(f) \tag{12.69}$$

である．ただし，

$$C_{T,g}(f) := \mathrm{Re}\,\langle T^{-1/2}f, T^{-1/2}g\rangle. \tag{12.70}$$

定理 12-21　任意の $t \in \mathbb{R}$, $f \in D(T^{-1/2})$, $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\Phi(t,f)\Psi = \left\{\Phi_{T,g}(e^{itT}f) - C_{T,g}(f)\right\}\Psi \tag{12.71a}$$

$$= \left\{\Phi_{\mathrm{S}}(e^{itT}f) + C_{T,g}((e^{itT}-1)f)\right\}\Psi \tag{12.71b}$$

が成り立つ．

証明　定理 12-10 を応用すればよい．　□

12-8-2　物理的真空期待値

(12.67) によって，$t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in \mathscr{H}$ に対して，フォック真空に関する，自由なハイゼンベルク場の期待値

$$W_n^{\mathrm{free}}(t_1,f_1,t_2,f_2,\cdots,t_n,f_n) := \langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi^{\mathrm{free}}(t_1,f_1)\cdots\Phi^{\mathrm{free}}(t_n,f_n)\Omega_{\mathscr{H}}\rangle \tag{12.72}$$

が定義され，

$$W_n^{\mathrm{free}}(t_1,f_1,t_2,f_2,\cdots,t_n,f_n) = \langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\mathrm{S}}(e^{it_1T}f_1)\cdots\Phi_{\mathrm{S}}(e^{it_nT}f_n)\Omega_{\mathscr{H}}\rangle \tag{12.73}$$

が成立する．右辺はすでに計算してあるので (定理 4-51)，ここでは具体的に書き下すことはしない．

(12.35) を仮定する．このとき，定理 12-6 により，$H_T(g)$ は基底状態 $\Omega_T(g)$ をもつ．これは，相互作用 $\Phi_{\mathrm{S}}(g)$ の摂動のもとで，フォック真空 $\Omega_{\mathscr{H}}$ が変化したものとみることができる．基底状態 $\Omega_T(g)$ を，フォック真空と区別する意味で，抽象的 van Hove モデルの**物理的真空** (physical vacuum) とよぶ．

補題 4-33 と (12.71a), (12.71b) により，$\Omega_T(g)$ はハイゼンベルク場 $\Phi(t,f)$ の任意個の積の定義域にはいる．したがって，任意の $n \in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in D(T^{-1/2})$ $(j = 1,\cdots,n)$ に対して物理的真空期待値

$$W_n^{(g)}(t_1,f_1,t_2,f_2,\cdots,t_n,f_n) := \langle \Omega_T(g), \Phi(t_1,f_1)\cdots\Phi(t_n,f_n)\Omega_T(g)\rangle \tag{12.74}$$

が定義される．(12.71) から，

$$W_n^{(g)}(t_1, f_1, t_2, f_2, \cdots, t_n, f_n)$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k;\, j_1<\cdots<j_{n-k} \\ \{i_1,\cdots,i_k\}\cap\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}=\varnothing \\ \{i_1,\cdots,i_k\}\cup\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}=\{1,\cdots,n\}}} (-1)^k \left\{\prod_{\ell=1}^{k} C_{T,g}(f_{i_\ell})\right\}$$

$$\times \langle \Omega_T(g), \Phi_{T,g}(e^{it_{j_1}} f_{j_1}) \cdots \Phi_{T,g}(e^{it_{j_{n-k}}} f_{j_{n-k}}) \Omega_T(g) \rangle$$

と表される．ただし，右辺の和は，$k = 0, n$ の場合も含み，$k = 0, n$ の場合はそれぞれ，$\{i_1, \cdots, i_k\} = \varnothing$, $\{j_1, \cdots, j_{n-k}\} = \varnothing$，と読む．一方，命題 12-18 (i) によって，任意の $f \in D(T^{-1/2})$ に対して，

$$\Phi_{T,g}(f) := e^{i\Phi_{\rm S}(iT^{-1}g)} \Phi_{\rm S}(f) e^{-i\Phi_{\rm S}(iT^{-1}g)}.$$

したがって，

$$\Phi_{T,g}(e^{itT} f) = e^{i\Phi_{\rm S}(iT^{-1}g)} \Phi_{\rm S}(e^{itT} f) e^{-i\Phi_{\rm S}(iT^{-1}g)} \quad (D(A(f)) \cap D(A(f)^*) \text{ 上}).$$

が得られる．ゆえに，任意の $k \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{R}$, $g_i \in D(T^{-1/2})$ $(i = 1, \cdots, k)$ に対して，

$$\langle \Omega_T(g), \Phi_{T,g}(e^{is_1} g_1) \cdots \Phi_{T,g}(e^{is_k} g_k) \Omega_T(g) \rangle$$

$$= \langle \Omega_{\mathscr{H}}, \Phi_{\rm S}(e^{is_1} g_1) \cdots \Phi_{\rm S}(e^{is_k} g_k) \Omega_{\mathscr{H}} \rangle$$

$$= W_n^{\rm free}(s_1, g_1, \cdots, s_n, g_n). \tag{12.75}$$

すなわち，作用素 $\Phi_{T,g}(\cdot)$ の物理的真空期待値は，自由なハイゼンベルク場のフォック真空に関する真空期待値に等しい．よって，

$$W_n^{(g)}(t_1, f_1, t_2, f_2, \cdots, t_n, f_n)$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k;\, j_1<\cdots<j_{n-k} \\ \{i_1,\cdots,i_k\}\cap\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}=\varnothing \\ \{i_1,\cdots,i_k\}\cup\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}=\{1,\cdots,n\}}} (-1)^k \left\{\prod_{\ell=1}^{k} C_{T,g}(f_{i_\ell})\right\}$$

$$\times W_{n-k}^{\rm free}(t_{j_1}, f_{j_1}, \cdots, t_{j_{n-k}}, f_{j_{n-k}}). \tag{12.76}$$

こうして，抽象的 van Hove モデルのハイゼンベルク場の物理的真空期待値をあらわに表すことができる．たとえば，$n = 1, 2$ に対する真空期待値を書けば次のようになる．

$$W_1^{(g)}(t_1,f_1) = -C_{T,g}(f_1),$$

$$W_2^{(g)}(t_1,f_1,t_2,f_2) = C_{T,g}(f_1)C_{T,g}(f_2) + W_2^{\mathrm{free}}(t_1,f_1,t_2,f_2).$$

$g \neq 0$ ならば，$W_n^{(g)}$ は，抽象的自由ボース場のフォック真空期待値 W_n^{free} とは異なることに注意しよう．

12-8-3 切断を除く極限

ある整数 $n_0 \geq 0$ と点列 $\{g_q\}_{q\in\mathbb{N}} \subset D(T^{-1})$ があって，

$$L_{T,\infty}(f) := \lim_{q\to\infty} \langle T^{-1/2}g_q, T^{-1/2}f\rangle, \quad f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0}),$$

が存在するとする．

例 12-7 $g \in D(T^{-1/2})$ であるが，$g \notin D(T^{-1})$ の場合を考える．$q > 0$ に対して，$g_q := \chi_{[1/q,\infty)}(T)g$ とすれば，$g_q \in D(T^{-1})$ であり，

$$L_{T,\infty}(f) = \langle T^{-1/2}g, T^{-1/2}f\rangle, \quad f \in D(T^{-1/2}).$$

これは赤外切断を除く極限に対応する．

例 12-8 T は真に正の自己共役作用素であるとし，$\{\mathscr{H}_{-n}(T)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を T に同伴するヒルベルト空間のスケールとする (例 4-9 を参照)．ある $n_0 \in \mathbb{N}$ に対して，$g \in \mathscr{H}_{-n_0-1}$ とする．$\lim_{q\to\infty} \|g_q - g\|_{-n_0-1} = 0$ となる $g_q \in \mathscr{H}$ がとれる．このとき，$\{T^{-n_0-1}g_q\}_q$ は $\mathscr{H}$ のコーシー列であり，任意の $f \in D(T^{n_0})$ に対して，$\langle T^{-1/2}g_q, T^{-1/2}f\rangle = \langle T^{-n_0-1}g_q, T^{n_0}f\rangle$ とかけるので，$L_{T,\infty}(f)$ は存在し，

$$L_{T,\infty}(f) = \langle \phi_g, T^{n_0}f\rangle_{\mathscr{H}}, \quad f \in D(T^{n_0}),$$

となる．ただし，$\phi_g := \lim_{q\to\infty} T^{-n_0-1}g_q$．例 12-6 によって，

$$L_{T,\infty}(f) = s_{n_0}(\hat{T}^{-1}g, f).$$

$g \notin \mathscr{H}$ ならば，これは紫外切断を除く場合に対応する．

定理 12-22 任意の $\in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0})$ $(j = 1,\cdots,n)$ に対して，

$$W_n^{\infty}(t_1,f_1,\cdots,t_n,f_n) := \lim_{q\to\infty} W_n^{(g_q)}(t_1,f_1,\cdots,t_n,f_n)$$

は存在し,

$$W_n^\infty(t_1, f_1, t_2, f_2, \cdots, t_n, f_n)$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k,\, j_1<\cdots<j_{n-k} \\ \{i_1,\cdots,i_k\}\cap\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}=\varnothing \\ \{i_1,\cdots,i_k\}\cup\{j_1,\cdots,j_{n-k}\}=\{1,\cdots,n\}}} (-1)^k \left\{\prod_{\ell=1}^k \mathrm{Re}\, L_{T,\infty}(f_{i_\ell})\right\}$$

$$\times W_{n-k}^{\mathrm{free}}(t_{j_1}, f_{j_1}, \cdots, t_{j_{n-k}}, f_{j_{n-k}}). \tag{12.77}$$

が成立する.

証明 (12.76) で $g = g_q$ の場合を考え, $q \longrightarrow \infty$ とすればよい. □

12-9 節　フォック表現と異なる, CCR の表現を用いる構成法

これまでに見たように, $g \notin D(T^{-1})$ である場合には, 抽象的 van Hove モデルは基底状態をもたない. しかし, 定理 12-22 は, 赤外切断をもつモデルの (真空期待値の意味での) 切断除去極限によって定義される理論 (すなわち, 真空期待値の集まり $\{W_n^\infty\}_{n\in\mathrm{N}}$ で定義される理論) を再現するような量子場の理論の存在を暗示する. すなわち, 物理的真空に関する, ハイゼンベルク場の n 個の積の期待値が W_n^∞ に等しいようなモデルの存在である. 実際, このような理論が構成できることを以下に示す. 基本的なアイディアは時刻 0 の場に対して CCR のフォック表現とは異なる表現を用いることである (0-2-6 項の発見法的議論を参照).

$L_{T,\infty}(f)$ を 12-8-3 項のものとし,

$$B_\infty(f) := A(f) - \frac{1}{\sqrt{2}} L_{T,\infty}(f)^*, \quad f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0}) \tag{12.78}$$

とする (右辺の定数項にかかる符号に注意). $\mathscr{V}$ を $D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0})$ に含まれる稠密な部分空間とする. このとき,

$$\pi_\infty := \{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}), \mathscr{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathscr{V}), \{B_\infty(f) \mid f \in \mathscr{V}\}\} \tag{12.79}$$

は CCR の表現である.

$$\phi_\infty(f) := \frac{1}{\sqrt{2}} \{B_\infty(f) + B_\infty(f)^*\}, \quad f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0}) \tag{12.80}$$

とおく. これを時刻 0 の場とするような理論をつくりたい. ハミルトニアンとして,

$$H := d\Gamma_{\rm b}(T) \tag{12.81}$$

をとる．これは一意的な基底状態

$$\Omega := \Omega_{\mathscr{H}} \tag{12.82}$$

をもつ．

ハミルトニアン H から定まるハイゼンベルク場 (時刻 0 の場を $\phi_\infty(f)$ とする) は

$$\phi_\infty(t,f) := e^{itH}\phi_\infty(f)e^{-itH}, \quad f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0}) \tag{12.83}$$

によって定義され，

$$\phi_\infty(t,f) = \Phi_{\rm S}(e^{itT}f) - {\rm Re}\, L_{T,\infty}(f) \quad (D(N_{\rm b}^{1/2})\ 上) \tag{12.84}$$

が成立する．

12-8 節の計算と同様にして，任意の $\in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{R}$, $f_j \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{n_0})$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して，

$$W_n^\infty(t_1, f_1, t_2, f_2, \cdots, t_n, f_n) = \langle \Omega, \phi_\infty(t_1, f_1) \cdots \phi_\infty(t_n, f_n)\Omega \rangle \tag{12.85}$$

が成り立つことがわかる．こうして，(H, ϕ_∞) は，基底状態 Ω をもち，これに関する，n 個のハイゼンベルク場の期待値が W_n^∞ に等しいような量子場のモデルをあたえる．

ここで注意すべきことは，H は自由場のハミルトニアンと形は同じであるが (H, ϕ_∞) で記述される理論は，$L_{T,\infty} \neq 0$ である限り，抽象的自由ボース場の理論と本質的に異なる (ユニタリ同値でない) ということである．量子場の理論を本質的に (内的に) 特徴づけるのは，単独のハミルトニアンの外的な形ではなく，ハミルトニアンと場の対である．この対が同種の他の対とユニタリ同値になるか否かが本質的なのである．

$f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^2) \cap D(T^{n_0})$ とすれば，定理 4-50 と (12.84) から，$D(N_{\rm b}^{1/2})$ 上で，

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_\infty(t,f) = -\Phi_{\rm S}(e^{itT}T^2 f)$$

$$= -\{\phi_\infty(t, T^2 f) + {\rm Re}L_{T,\infty}(T^2 f)\} \quad (再び\ (12.84)\ を使う).$$

したがって，$D(N_{\rm b}^{1/2})$ 上で

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_\infty(t,f) + \phi_\infty(t, T^2 f) = -{\rm Re}L_{T,\infty}(T^2 f),$$

$$f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^2) \cap D(T^{n_0}) \tag{12.86}$$

が成立する．これが，$\phi_\infty(t,f)$ のみたす方程式である．

例 12-9 (赤外切断なしの理論)　$g \in D(T^{-1/2})$, $g \notin D(T^{-1})$ とする．例 12-7 にしたがって，$L_{T,\infty}(f) = \langle T^{-1/2}g, T^{-1/2}f\rangle$ とする．この場合の ϕ_∞ と H の対 (H,ϕ_∞) は，相互作用を特徴づけるベクトル g が赤外特異条件にしたがうにもかかわらず，ハミルトニアンが基底状態をもつ量子場のモデルをあたえる．この場合，$\phi_\infty(t,f)$ は，(12.86) によって，$D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})$ 上で，抽象的 van Hove モデルと同じ場の方程式 ((12.22b) を参照)

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_\infty(t,f) + \phi_\infty(t,T^2 f) = -\mathrm{Re}\,\langle g, Tf\rangle_{\mathscr{H}}, \quad f \in D(T^2)\cap D(T^{-1/2}),$$

をみたす．

例 12-10 (紫外切断なしの理論)　T, $g \notin \mathscr{H}$ 等を例 12-8 のものとする．

$$L_{T,\infty}(f) = s_{n_0}(\hat{T}^{-1}g, f)$$

とすれば，この場合の ϕ_∞ と H の対 (H,ϕ_∞) は，紫外切断なしの抽象的 van Hove モデルを定義する．場 $\phi_\infty(t,f)$ がしたがう方程式は，任意の $f \in D(T^2)\cap D(T^{n_0})$ に対して，(12.86) によって，

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_\infty(t,f) + \phi_\infty(t,T^2 f) = -\mathrm{Re}\, s_{n_0+1}(g, Tf) \quad (D(N_{\mathrm{b}}^{1/2})\ \text{上})$$

という形をとる．

12-10 節　散乱理論

12-10-1　一般的考察

一般に，素粒子の相互作用を見る手段の 1 つは，加速器によって素粒子どうしを衝突させ，その結果を観測することである．素粒子どうしが衝突する現象は素粒子の散乱現象とよばれる．この現象は理論的には**散乱理論**とよばれる理論で記述される．散乱現象にあっては，無限の過去と無限の未来において，粒子は自由粒子として振る舞う．これらの自由粒子で記述される，無限の過去の状態と無限の未来の状態との間の遷移確率が計算できればよい．したがって，散乱理論では，まず，無限の過去と無限の未来において，自由粒子のように振る舞う粒子の存在を確立しなければならない．これは，相互作用する量子場の時刻 $\pm\infty$ の極限 — 漸近場とよばれる — を考察することによってなされる．これがどのようなものか発見法的に見ておく．

いま，ハミルトニアン $\hat{H}$ をもつ量子場の理論があったとし，A をこの系の物理量とする (たとえば，時刻 0 の場)．もし，この理論が散乱を記述するものであるならば，時刻 t が $\pm\infty$ になるとき，A に関するハイゼンベルク作用素 $e^{it\hat{H}}Ae^{-it\hat{H}}$ は漸近的に

$$e^{it\hat{H}}Ae^{-it\hat{H}} \sim e^{it\hat{H}_0}A_{\pm}e^{-it\hat{H}_0}, \quad t \longrightarrow \pm\infty$$

のように振る舞うと期待される．ここで，$A_{\pm}$ は $A, \hat{H}$ から決まる作用素，$\hat{H}_0$ は相互作用を記述しない，自由場のハミルトニアンである．$A_{\pm}$ を A に対する**漸近作用素** (asymptotic operator) という．A が量子場であれば，$A_{\pm}$ は**漸近場** (asymptotic field) とよばれる．したがって，散乱は，物理量の言葉では，対応 $A_{-} \longrightarrow A_{+}$ によって記述されることになる．上の式で，形式的に，A のかわりに $e^{-it\hat{H}_0}Ae^{it\hat{H}_0}$ を考え，$(e^{-it\hat{H}_0}Ae^{it\hat{H}_0})_{\pm} \sim e^{-it\hat{H}_0}A_{\pm}e^{it\hat{H}_0}$ $(t \longrightarrow \pm\infty)$ を仮定すれば，

$$e^{it\hat{H}}e^{-it\hat{H}_0}Ae^{it\hat{H}_0}e^{-it\hat{H}} \sim A_{\pm}, \quad t \longrightarrow \pm\infty$$

が成立することが予想される．こうして，散乱理論においては，漸近作用素

$$A_{\pm} = \lim_{t\to\pm\infty} e^{it\hat{H}}e^{-it\hat{H}_0}Ae^{it\hat{H}_0}e^{-it\hat{H}}$$

の存在を確立することが最初の問題になる．もちろん，この場合，この極限がいかなる意味のものであるかを指定する必要がある．以下では，抽象的 van Hove モデルの場合に，散乱理論がどのようなもであるかを論述する．

12-10-2　抽象的 van Hove モデルにおける散乱理論

再び，抽象的 van Hove モデルにもどる．$t \in \mathbb{R}$, $f \in D(T^{-1/2})$ に対して，

$$A(t,f) := e^{itH_T(g)}e^{-itd\Gamma_{\rm b}(T)}A(f)e^{itd\Gamma_{\rm b}(T)}e^{-itH_T(g)}$$

とする．$D((H_T(g) - E_0(H_T(g)))^{1/2}) = D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ (定理 12-2 (iii)) と $D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}) \subset D(A(f))$ $(f \in D(T^{-1/2}))$ によって，

$$D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}) \subset D(A(t,f))$$

である．

定理 12-23　T は絶対連続であるとする．このとき，任意の $f \in D(T^{-1/2})$ と $\Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2})$ に対して，

$$A_{\pm}(f)\Psi := \lim_{t\to\pm\infty} A(t,f)\Psi$$

は存在し,

$$A_{\pm}(f)\Psi = A_{T,g}(f)\Psi$$

が成り立つ.

証明 (12.42) から,

$$A(f) = A_{T,g}(f) - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle T^{-1/2}f, T^{-1/2}g\rangle.$$

これと命題 4-46, 定理 12-10 を使えば,

$$A(t,f) = A_{T,g}(f) - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle T^{-1/2}e^{-itT}f, T^{-1/2}g\rangle \quad (D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \text{ 上})$$

が得られる. T の絶対連続性により,

$$\lim_{t\to\pm\infty}\langle T^{-1/2}e^{-itT}f, T^{-1/2}g\rangle = 0.$$

よって題意が成立する. □

定理 12-23 は, 作用素 $A_{T,g}(f)$ を**漸近的消滅作用素** $A_{\pm}(f)$ として特徴づける.

T は絶対連続で, $g \in D(T^{-1})$ としよう. 定理 12-6 により, $H_T(g)$ は基底状態 $\Omega_T(g)$ をもち, 定理 12-10 (ii) によって, $A_{T,g}(f)\Omega_T(g) = 0$ が成立する. したがって, $A_{\pm}(f)\Omega_T(g) = 0$. $\{A_{\pm}(f), A_{\pm}(f)^* \mid f \in D(T^{-1/2})\}$ は CCR をみたすから (複合同順), 作用素 $A_{\pm}(f)^*$ は, 考察下の相互作用のもとで, 観測にかかる物理的粒子の生成作用素を記述すると解釈される[18]. したがって, 任意の $f_j \in D(T^{-1/2})$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して, ベクトル

$$\Psi_{-}(f_1, \cdots, f_n) := A_{-}(f_1)^* \cdots A_{-}(f_n)^*\Omega_T(g),$$

$$\Psi_{+}(f_1, \cdots, f_n) := A_{+}(f_1)^* \cdots A_{+}(f_n)^*\Omega_T(g),$$

はそれぞれ, 無限の過去, 未来における, 観測にかかる物理的粒子の n 粒子状態を表す[19]. 定理 12-23 から, $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ 上で

$$A_{+}(f)^* = A_{-}(f)^*$$

が成り立つので,

---

[18] これに対して, $A(f)$, $A(f)^*$ によってその消滅, 生成が記述される粒子は**裸の粒子**または**仮想粒子**とよばれる.

[19] 以上の解釈は, 他の量子場のモデルの漸近的生成・消滅作用素に対しても当てはまるものである.

$$\Psi_-(f_1,\cdots,f_n)=\Psi_+(f_1,\cdots,f_n)$$

である．したがって，状態 $\Psi_-(f_1,\cdots,f_n)$ から状態 $\Psi_+(g_1,\cdots,g_l)$ ($g_j\in D(T^{-1/2})$, $j=1,\cdots,l$) への遷移確率振幅

$$P(g_1,\cdots,g_l;f_1,\cdots,f_n):=\frac{\langle\Psi_+(g_1,\cdots,g_l),\Psi_-(f_1,\cdots,f_n)\rangle}{\|\Psi_+(g_1,\cdots,g_l)\|\,\|\Psi_-(f_1,\cdots,f_n)\|}$$

は

$$P(g_1,\cdots,g_l;f_1,\cdots,f_n)=\frac{\delta_{ln}}{\|\Psi_+(g_1,\cdots,g_n)\|\|\Psi_-(f_1,\cdots,f_n)\|}\times\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\langle g_1,f_{\sigma(1)}\rangle\cdots\langle g_n,f_{\sigma(n)}\rangle \tag{12.87}$$

と計算される．これから，まず，次のことがわかる．$l\neq n$ ならば

$$P(g_1,\cdots,g_l;f_1,\cdots,f_n)=0$$

となるので，散乱の始状態 $\Psi_-(\cdot)$ と終状態 $\Psi_+(\cdot)$ に関して，粒子数が異なる状態間の遷移は存在しないということである．つまり，散乱において，物理的粒子の個数は保存される．これは，散乱において物理的粒子の生成・消滅が起こらないことを意味する．

$l=n$ の場合の物理的解釈をするために，$\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^d_k)$ の場合を考え，f_j, g_j として，運動量がほぼ確定している自由粒子の 1 粒子状態を表す関数をとる．このために，$\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で

$$\operatorname{supp}\eta\subset\{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d\,|\,|\boldsymbol{k}|\leq 1\},\quad \int_{\mathbb{R}^d}|\eta(\boldsymbol{k})|^2\,d\boldsymbol{k}=1, \tag{12.88}$$

をみたすものを任意に 1 つ固定し，各 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^d$ と $\varepsilon>0$ に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}$ を

$$w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{k}):=\varepsilon^{-d/2}\eta(\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})),\quad \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d, \tag{12.89}$$

によって定義する．このとき，(12.88) により，

$$\|w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=1 \tag{12.90}$$

であり，(12.4a) によって，$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ の位相で，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{k})|^2=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}) \tag{12.91}$$

が成り立つ．さらに

$$\operatorname{supp}w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}\subset\{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d\,|\,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|\leq\varepsilon\} \tag{12.92}$$

であるから，$\varepsilon > 0$ が十分小さければ，関数 $w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}$ で表される 1 粒子状態は運動量がほぼ $\boldsymbol{p}$ に確定している状態とみなせる．

そこで，$\boldsymbol{p}_j, \boldsymbol{p}'_j \in \mathbb{R}^d$ $(j = 1, \cdots, n)$ とし，

$$f_j = w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_j}, \quad g_j = w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_j},$$

の場合を考える．簡単のため，$\boldsymbol{p}_j \neq \boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{p}'_j \neq \boldsymbol{p}'_i$ $(i \neq j)$ としよう．このとき，$\varepsilon > 0$ が十分小さければ，任意の $j \neq l$ に対して，

$$\operatorname{supp} w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_j} \cap \operatorname{supp} w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_l} = \varnothing, \quad \operatorname{supp} w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_j} \cap \operatorname{supp} w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_l} = \varnothing. \tag{12.93}$$

したがって，

$$\| \Psi_-(w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_1}, \cdots, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_n}) \| = 1, \quad \| \Psi_+(w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_1}, \cdots, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_n}) \| = 1, \tag{12.94}$$

であり，

$$\begin{aligned} &P(w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_1}, \cdots, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_n}; w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_1}, \cdots, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \langle w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_1}, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_{\sigma(1)}} \rangle \cdots \langle w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_n}, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_{\sigma(n)}} \rangle \end{aligned} \tag{12.95}$$

が成り立つ．任意の $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}' \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'}, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}} \rangle = \delta_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}} \tag{12.96}$$

を示すのは容易である．これと (12.95) から，

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{p}'_1, \cdots, \boldsymbol{p}'_n; \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n) &:= \lim_{\varepsilon \to 0} P(w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_1}, \cdots, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}'_n}; w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_1}, \cdots, w_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_{\boldsymbol{p}'_1 \boldsymbol{p}_{\sigma(1)}} \cdots \delta_{\boldsymbol{p}'_n \boldsymbol{p}_{\sigma(n)}} \end{aligned}$$

が得られる．これは，集合 $\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\}$ と集合 $\{\boldsymbol{p}'_1, \cdots, \boldsymbol{p}'_n\}$ が一致しなければ，$P(\boldsymbol{p}'_1, \cdots, \boldsymbol{p}'_n; \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = 0$ を意味する．他方，$\{\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n\} = \{\boldsymbol{p}'_1, \cdots, \boldsymbol{p}'_n\}$ ならば，ある $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ があって，$\boldsymbol{p}'_j = \boldsymbol{p}_{\sigma(j)}$ $(j = 1, \cdots, n)$ であるから，$P(\boldsymbol{p}'_1, \cdots, \boldsymbol{p}'_n; \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n) = 1$ となる．これらの計算結果は，終状態が，$\varepsilon \longrightarrow 0$ の極限において，始状態と同じ状態にある確率が 1 であることを示す．これは物理的には非自明な散乱が起こらないことを意味する．

以上の考察を合わせると，van Hove モデルでは，物理的粒子の生成・消滅や非自明な散乱が起こらないことが結論される．

12-11 節 具象的 van Hove モデルへの応用

12-2 節から 12-10 節までの結果は，12-1 節で記述した具象的 van Hove モデルに応用できる．実際，例 12-3 で述べたように，$\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$, $T = \omega$, $g = -\hat{\varrho}/\sqrt{\omega}$ とればよい．結果を定理としてまとめておこう．

12-11-1 スペクトル特性

$\varrho \in H^{-1}_\omega(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ として，

$$E_0(\varrho) := -\frac{1}{2}\|\omega^{-1}\hat{\varrho}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varrho}(\boldsymbol{k})|^2}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\, d\boldsymbol{k}$$

を定義する．

定理 12-24 $\varrho \in H^{-1}_\omega(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ とする．

(i) H_ϱ は $D(H_0)$ 上で自己共役であり，下に有界である．さらに，H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役である．

(ii) $\varrho \in H^{-3/2}_\omega(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ ならば，

$$\sigma(H_\varrho) = \{E_0(\varrho)\} \cup [E_0(\varrho) + m, \infty),$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H_\varrho) = \{E_0(\varrho)\}.$$

ここで，固有値 $E_0(\varrho)$ の多重度は 1 であり，これに属する固有ベクトル (基底状態) は (定数倍を除いて)

$$\Omega_\varrho := e^{i\Phi_{\mathrm{S}}(i\omega^{-3/2}\hat{\varrho})}\Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}$$

であたえられる．

次に $\hat{\varrho}/\sqrt{\omega}$ が赤外特異条件にしたがう場合の結果を得るために，次の事実を証明しておく．

補題 12-25 自己共役作用素 ω は絶対連続である．

証明 ω のスペクトル測度を E_ω とすれば，任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ とボレル集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\|E_\omega(B)f\| = \int_{\omega(\boldsymbol{k})\in B} |f(\boldsymbol{k})|^2\, d\boldsymbol{k}$$

が成立する[20)]．ω の値域は $[m,\infty)$ であるから，$B\subset(-\infty,m)$ ならば，$\|E_\omega(B)f\| = 0$ である．したがって，$B\subset[m,\infty)$ となる B について考察すればよい．k を d 次元空間の極座標で表す：

$$
\begin{aligned}
k_1 &= k\cos\theta_1,\\
k_2 &= k\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
k_3 &= k\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\
&\ \vdots\\
k_{d-1} &= k\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1},\\
k_d &= k\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}.
\end{aligned}
$$

$k=|\boldsymbol{k}|$, $0\le\theta_j\le\pi$ $(j=1,\cdots,d-2,\ 0\le\theta_{d-1}\le 2\pi)$．この意味で，$\boldsymbol{k}=k\theta$ と記す．このとき，

$$d\boldsymbol{k} = k^{d-1}\,d\xi_\theta dk.$$

ただし，

$$d\xi_\theta := \sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\,d\theta_1\cdots d\theta_{d-1}.$$

$\lambda\ge m$ として $k=\sqrt{\lambda^2-m^2}$ と変数変換すれば，

$$\|E_\omega(B)f\| = \int_B F(\lambda)\,d\lambda$$

と書き直せる．ただし，$F(\lambda):=\int|f(\sqrt{\lambda^2-m^2}\theta)|^2(\lambda^2-m^2)^{d/2-1}\lambda\,d\xi_\theta$．$F$ は $[m,\infty)$ 上のルベーグ可積分関数であるから，上の式は，測度 $\|E_\omega(\cdot)f\|$ の，ルベーグ測度に関する絶対連続性を示す．$f\in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ は任意であったから，題意がしたがう．□

定理 12-7，定理 12-12 から，次を得る．

定理 12-26　$\varrho\in H_\omega^{-1}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ であるが，$\varrho\notin H_\omega^{-3/2}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\sigma(H_\varrho) &= \{E_0(\varrho)\}\cup[E_0(\varrho)+m,\infty),\\
\sigma_{\mathrm{p}}(H_\varrho) &= \varnothing.
\end{aligned}
$$

[20)] 新井 (1997a) の 3 章，練習問題 10 を参照．

系 12-27　$d=3$ の場合を考え，$\varrho \in H_\omega^{-1}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^3)$ とする．$m=0$ とし (したがって，$\omega(\boldsymbol{k})=|\boldsymbol{k}|$)，定数 $c>0$ と $\delta>0$ が存在して，

$$|\boldsymbol{k}| \le \delta \text{ ならば } |\hat{\varrho}(\boldsymbol{k})| \ge c \tag{12.97}$$

であるとする．このとき，H_ϱ は固有ベクトルをもたない．

証明　仮定により，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_{\boldsymbol{k}}^3} \frac{|\hat{\varrho}(\boldsymbol{k})|^2}{\omega(\boldsymbol{k})^3}\, d\boldsymbol{k} &\ge \int_{|\boldsymbol{k}|\le\delta} \frac{|\hat{\varrho}(\boldsymbol{k})|^2}{\omega(\boldsymbol{k})^3}\, d\boldsymbol{k} \\ &\ge c^2 \int_{|\boldsymbol{k}|\le\delta} \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^3}\, d^3\boldsymbol{k} = \infty.\end{aligned}$$

したがって，$\varrho \notin H_\omega^{-3/2}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^3)$．ゆえに，定理 12-26 の仮定がみたされるので，題意がしたがう．　□

注意 12-8　$m=0$ で，$d=1,2$ の場合，条件 (12.97) のもとでは，$\varrho \notin H_\omega^{-1}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^d)$ であるから，定理 12-26 の大前提がみたされない．

12-11-2　場の方程式

具象的 van Hove モデルのハイゼンベルク場は

$$\phi(t,f) := e^{itH_\varrho}\phi_0(f)e^{-itH_\varrho} \tag{12.98a}$$

によって定義される．また，

$$\pi(t,f) := e^{itH_\varrho}\pi_0(f)e^{-itH_\varrho} \tag{12.98b}$$

とおく．

定理 12-28　$\varrho \in H_\omega^{-1}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^d)$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^d)$, $\hat{f}/\sqrt{\omega} \in D(\omega^2)\cap D(\omega^{-1/2})$ とする．このとき，$\phi(t,f)$ は $D(H_\rho^{3/2})$ 上で，2 回強微分可能であり，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\phi(t,f) = \pi(t,f),\\ &\frac{d^2}{dt^2}\phi(t,f) + \phi(t,(-\Delta+m^2)f) = \langle \varrho, f\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明　まず，$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ が実関数である場合を考えよう．このとき，

$$\phi(t,f) := e^{itH_\varrho}\Phi_{\mathrm{S}}\left(\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right)e^{-itH_\varrho}$$

と表すことができる．そこで，定理 12-4 を右辺に適用し，

$$\omega^2\hat{f} = ((-\Delta^2 + m^2))\hat{}, \quad -\mathrm{Re}\left\langle\frac{-\hat{\varrho}}{\sqrt{\omega}}, \omega\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right\rangle = \mathrm{Re}\,\langle\hat{\varrho}, \hat{f}\rangle = \langle\varrho, f\rangle$$

に注意すれば，求める結果が得られる．

次に f が実関数でない場合には，$f = f_1 + if_2$ ($f_1 := \mathrm{Re}\, f$, $f_2 := \mathrm{Im}\, f$) と分け，$\phi(t,f) = \phi(t,f_1) + i\phi(t,f_2)$ に注意して，$\phi(t,f_1)$, $\phi(t,f_2)$ に前半の結果を使えばよい． □

12-11-3　点源の場合

簡単のため，$m > 0$ の場合を考える．このとき，

$$L^2_{\omega^{-n}}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}) := \left\{ f \;\middle|\; \frac{f}{\omega^n} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}) \right\}$$

とすれば，この空間は内積は，

$$\langle f, g\rangle_{-n} = \langle\omega^{-n}f, \omega^{-n}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}, \quad f,\, g \in L^2_{\omega^{-n}}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$$

によってヒルベルト空間になる．実は，このヒルベルト空間は，$\mathscr{H}_{-n}(\omega)$ と自然な形で同一視される．実際，f を $\mathscr{H}_{-n}(\omega)$ の任意の元とすれば，$f_j \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ で $\|f_j - f\|_{-n} \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$) となるものがある．したがって，f_j は $L^2_{\omega^{-n}}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ のコーシー列である．ゆえに $\tilde{f} \in L^2_{\omega^{-n}}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ が存在して，

$$\int_{\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}} |f_j(\boldsymbol{k}) - \tilde{f}(\boldsymbol{k})|^2\omega(\boldsymbol{k})^{-2n}\, d\boldsymbol{k} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

そこで，対応 $f \longrightarrow \tilde{f}$ を考えると，この対応は $\mathscr{H}_{-n}(\omega)$ から $L^2_{\omega^{-n}}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ へのユニタリ変換になる．この意味で，$\mathscr{H}_{-n}(\omega)$ を $L^2_{\omega^{-n}}(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ と同一視する．

$\varrho^{(\mathrm{p})}$ を例 12-2 のものとする (点源)．容易にわかるように，

$$\widehat{\varrho^{(\mathrm{p})}}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}}\sum_{n=1}^N \lambda_n e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_n}.$$

したがって，すべての $n > (d-1)/2$ に対して，$\hat{\varrho}^{(\mathrm{p})}/\sqrt{\omega} \in \mathscr{H}_{-n}(\omega)$ である．ゆえに，点源の場合でも，12-9 節の一般的方法をいまの場合に応用することにより，方程式 (12.1) にしたがう，量子場の理論を構成することができる．その詳細を埋めることは読者に任せよう．

12-11-4 基底状態エネルギーの点源極限

$\delta, \kappa > 0$ に対して，

$$\varrho_{\delta,\kappa}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\delta \le |\boldsymbol{k}| \le \kappa} \widehat{\varrho^{(\mathrm{p})}}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{k}$$

とおく．したがって，

$$\hat{\varrho}_{\delta,\kappa}(\boldsymbol{k}) = \chi_{[\delta,\kappa]}(|\boldsymbol{k}|)\widehat{\varrho^{(\mathrm{p})}}(\boldsymbol{k})$$

である．ここで，$\chi_{[\delta,\kappa]}$ は閉区間 $[\delta,\kappa]$ の定義関数である．容易にわかるように，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\varrho_{\delta,\kappa} \in H^s_\omega(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$$

であり，超関数の意味で ($\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}})$ の位相で)(付録 D の例 D-12 を参照)，

$$\lim_{\delta \to 0,\, \kappa \to \infty} \varrho_\kappa = \varrho^{(\mathrm{p})}.$$

したがって，$\varrho_{\delta,\kappa}$ は点源を近似する，数学的に “たちのよい” 源である．

源 $\varrho_{\delta,\kappa}$ に対する相互作用 $-\phi_0(\varrho_{\delta,\kappa})$ においては，δ, κ はそれぞれ，赤外切断と紫外切断のパラメータとみなせる．この相互作用をもつハミルトニアン $H_{\varrho_{\delta,\kappa}}$ の基底状態エネルギーは

$$\begin{aligned} E_0(H_{\varrho_{\delta,\kappa}}) &= -\frac{1}{2}\left\| \frac{\hat{\varrho}_{\delta,\kappa}}{\omega} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})} \\ &= E^{(d)}_{\delta,\kappa} + V^{(d)}_{\delta,\kappa}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \end{aligned}$$

と書ける．ただし，

$$E^{(d)}_{\delta,\kappa} = -\frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n^2}{2(2\pi)^d} \int_{\delta \le |\boldsymbol{k}| \le \kappa} \frac{1}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\, d\boldsymbol{k}, \tag{12.99}$$

$$V^{(d)}_{\delta,\kappa}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = -\sum_{j \ne n}^N \frac{\lambda_n \lambda_j}{2(2\pi)^d} \int_{\delta \le |\boldsymbol{k}| \le \kappa} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_j)}}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\, d\boldsymbol{k}. \tag{12.100}$$

明らかに，$d \ge 2$ ならば，

$$E^{(d)}_{\delta,\kappa} \longrightarrow -\infty, \quad \kappa \longrightarrow \infty. \tag{12.101}$$

$\delta \longrightarrow 0$, $\kappa \longrightarrow \infty$ に関する $V^{(d)}_{\delta,\kappa}$ の収束については，ここでは，$d = 3$ の場合だけ

を考察する[21]．極座標に変換することにより，$\boldsymbol{x} \neq 0$ のとき，

$$\int_{\delta \le |\boldsymbol{k}| \le \kappa} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{k}^2 + m^2}\, d\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{i|\boldsymbol{x}|} \int_{\delta \le |k| \le \kappa} \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}|}}{k^2 + m^2} k\, dk.$$

留数定理を用いて，

$$\lim_{\delta \to 0,\, \kappa \to \infty} \int_{\delta \le |k| \le \kappa} \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}|}}{k^2 + m^2} k\, dk = i\pi e^{-m|\boldsymbol{x}|} \tag{12.102}$$

がわかる ($m = 0$ の場合でも成立)．したがって，$\boldsymbol{x}_j \neq \boldsymbol{x}_n$ ($j \neq n$, $j, n = 1, \cdots, N$) のとき，

$$\lim_{\delta \to 0,\, \kappa \to \infty} V_{\delta,\kappa}^{(3)}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = \sum_{j<n} \lambda_j \lambda_n V_m(\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_n) \tag{12.103}$$

となる (和のとりかたに注意)．ここで，

$$V_m(\boldsymbol{x}) := -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \tag{12.104}$$

$m > 0$ ならば，V_m は**湯川ポテンシャル**とよばれる関数であり，

$$V_0(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \tag{12.105}$$

($m = 0$ の場合) は**クーロンポテンシャル**である．

この結果は次のように解釈される．源を固定された核子とみよう．すると，すでに述べたように (12-1 節)，具象的 van Hove モデルは，核子どうしがボソン (中間子) を交換することにより，力 (核力) が生じる過程を記述している．もっともエネルギーの低い基底状態においては，この力のポテンシャルが，点源の極限において，負の無限大に発散する定数項 $E_{\delta,\kappa}^{(3)}$ を引きさることにより，湯川ポテンシャル ($m > 0$ の場合) またはクーロンポテンシャル ($m = 0$ の場合) であたえられるということである．こうして，湯川ポテンシャルに対して，場の量子論的な導出がなされる．なお，負の無限大に発散する定数項 $E_{\delta,\kappa}^{(3)}$ を引きさる手続きは，**エネルギーのくりこみ**とよばれる処方箋の一例である．

ノート

具象的 van Hove モデルは，自由場と同値でないと予想される量子場のモデルのうちで，最も数学的に扱いやすいものであり，場の量子論の数学的研究の初期の段階で詳しく論じられた (van Hove (1952), Miyatake (1952a, 1952b), Cook (1953), Friedrichs (1953) など)．

---

[21] 一般の d の場合については，新井 (1997b) の 7 章，7.3 節を参照．

van Hove モデルのわかりやすく，優れた物理的議論が Henly and Thirring (1962) の 8 章，9 章にある (本章の問題 6～9 も参照).

van Hove モデルの赤外カタストローフ的側面を抽象的な形で詳しく論じたのは本書が初めてであろうと思われる．(T, g) が赤外特異条件にしたがうとき，これを正則化する方法の 1 つとして，本文では，g を $\chi_{[a,\infty)}(T)g$ $(a > 0)$ に置き換える処方をとったが，$M > 0$ を定数とし，T を $T_M := T + M$ に置き換える方法をとってもよい．もっと一般的なモデルに関して，後者の方法による解析が Arai and Hirokawa (1997, 1999a) にある．

12-10 節で述べた型の散乱理論の厳密な研究は，Kato and Mugibayashi (1963, 1964) によって始められ，Hoegh-Krohn (1968, 1969, 1970)，Albeverio (1974) 等によって発展させられた．

公理論的な場の量子論における散乱理論は Haag-Ruelle の散乱理論として確立されている．たとえば，ボゴリューボフ他 (1972) の 4 章，Reed and Simon (1979) の §XI.16，Glimm and Jaffe (1987) の Chapter 13 を参照．

12 章演習問題

♮**1.** (12.1) をみたす場 φ に対して，$\varphi_{(a,\Lambda)}(x) := \varphi(\Lambda^{-1}(x-a))$ $((a,\Lambda) \in \mathscr{P}_+^\uparrow)$ のみたす方程式を求めよ．これから，$\varrho \neq$ 定数のとき，方程式 (12.1) は Poincaré 共変でないことを示せ．

♮**2.** SO(d) を d 次元回転群とする．(12.1) をみたす場 φ に対して，$\varphi_T(t, \boldsymbol{x}) := \varphi(t, T^{-1}\boldsymbol{x})$ $(T \in \mathrm{SO}(d))$ のみたす方程式を求めよ．これから，方程式 (12.1) は SO(d)-共変であることを示せ．

♮**3.** (12.4b) を証明せよ．

次の問題 4～6 は抽象的 van Hove モデルに関するものである．T はヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の非負で単射な自己共役作用素であるとし，$g \in D(T^{-1})$ とする．したがって，定理 12-6 によって，抽象的 van Hove モデルは基底状態 $\Omega_T(g)$ をもつ ((12.34a) 式)．

4. S を T と強可換な有界自己共役用素とする．このとき，

$$\langle \Omega_T(g), d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)\Omega_T(g)\rangle = \frac{1}{2}\langle T^{-1}g, ST^{-1}g\rangle$$

を証明せよ．

5. 任意の f, f_1, $f_2 \in \mathscr{H}$ に対して，次の等式を示せ．

$$\langle \Omega_T(g), A(f)\Omega_T(g)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle f, T^{-1}g\rangle,$$

$$\langle \Omega_T(g), A(f)^*\Omega_T(g)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle T^{-1}g, f\rangle,$$

$$\langle \Omega_T(g), \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Omega_T(g)\rangle = -\mathrm{Re}\,\langle f, T^{-1}g\rangle,$$

$$\langle \Omega_T(g), A(f_1)^* A(f_2) \Omega_T(g) \rangle = \frac{1}{2} \langle T^{-1}g, f_1 \rangle \langle f_2, T^{-1}g \rangle,$$

$$\langle \Omega_T(g), \Phi_{\mathrm{S}}(f)^2 \Omega_T(g) \rangle = (\mathrm{Re}\, \langle f, T^{-1}g \rangle)^2 + \frac{\|f\|^2}{2}.$$

6. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の CONS とし,

$$\mathscr{N}_0 := \{\boldsymbol{n} = \{n_j\}_{j=1}^{\infty} \mid n_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, \text{ある番号 } j_0 \text{ があって},$$
$$j \geq j_0 \text{ ならば}, \ n_j = 0\}$$

とおく．各 $\boldsymbol{n} \in \mathscr{N}_0$ に対して,

$$\Psi_{\boldsymbol{n}} := \left(\prod_{j=1}^{\infty} A(f_j)^{*n_j} \right) \Omega_{\mathscr{H}}$$

とおく (n_j のうち，0 でないものは有限個であるから右辺は意味をもつ).

(i) n_j ($j = 1, 2, \cdots$) のうち，0 でないものを $n_{i_1}, \cdots, n_{i_l}$ とすれば,

$$\|\Psi_{\boldsymbol{n}}\|^2 = n_{i_1}! \cdots n_{i_l}!$$

であることを示せ.

(ii)

$$P(\boldsymbol{n}) := \frac{|\langle \Psi_{\boldsymbol{n}}, \Omega_T(g) \rangle|^2}{\|\Psi_{\boldsymbol{n}}\|^2}, \quad \lambda_j := \frac{|\langle f_j, T^{-1}g \rangle|^2}{2}, \quad j \in \mathbb{N},$$

とおく．このとき,

$$P(\boldsymbol{n}) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{n_j} e^{-\lambda_j}}{n_j!}$$

を示せ.

ヒント 命題 4-54 と (4.110).

(iii) $\sum_{\boldsymbol{n} \in \mathscr{N}_0} P(\boldsymbol{n}) = 1$ を示せ.

注意 $P(\boldsymbol{n})$ は基底状態 $\Omega_T(g)$ において，$j = 1, 2, \cdots,$ に対して，1 粒子状態が f_j によって記述される仮想粒子が n_j 個存在する確率を表す．(ii), (iii) は，この確率がポアソン (Poisson) 分布にしたがうことを示している[22].

以下では，具象的 van Hove モデル (12-11 節) において，$m > 0$, $\varrho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ の場合を考察する．このとき，$\varrho \in H_{\omega}^{-3/2}(\mathbb{R}^d)$ であるので，基底状態 Ω_ϱ が存在する (定理 12-24).

---

[22] n 個の独立な確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ について，定数 $r_1, \cdots, r_n$ があって，$X_j = k_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ である確率が $\prod_{j=1}^{n} \left(r_j^{k_j} e^{-r_j} / k_j! \right)$ であるとき，$(X_1, \cdots, X_n)$ は $(r_1, \cdots, r_n)$ を母数ベクトルとする**ポアソン分布**にしたがうという.

7. 次の性質をみたす実数値関数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ をとる：

$$\operatorname{supp} f \subset \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d \mid |\boldsymbol{k}| \le 1\}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{k})\, d\boldsymbol{k} = 1.$$

任意の $\varepsilon > 0$ と $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$f_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{k}) := \varepsilon^{-d} f(\varepsilon^{-1}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p})), \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d,$$

とおく．このとき，

$$\bar{n}(\boldsymbol{p}) := \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \Omega_\varrho, a(f_{\varepsilon,\boldsymbol{p}})^* a(f_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}) \Omega_\varrho \rangle = \frac{|\hat{\varrho}(\boldsymbol{p})|^2}{2\omega(\boldsymbol{p})^3}$$

を示せ．

注意　$\bar{n}(\boldsymbol{p})$ は，象徴的に，

$$\bar{n}(\boldsymbol{p}) = \langle \Omega_\varrho, a(\boldsymbol{p})^* a(\boldsymbol{p}) \Omega_\varrho \rangle \qquad (*)$$

と書かれる ($f_{\varepsilon,\boldsymbol{p}} \xrightarrow{\mathscr{S}'} \delta(\boldsymbol{p})$ $(\varepsilon \longrightarrow 0)$ に注意)．つまり，$\bar{n}(\boldsymbol{p})$ は，基底状態における，運動量 $\boldsymbol{p}$ のボソンの平均個数を表す．実は，$a(\boldsymbol{p})$ の定義域を拡大することにより，$(*)$ の右辺は，$\langle a(\boldsymbol{p})\Omega_\varrho, a(\boldsymbol{p})\Omega_\varrho \rangle$ として数学的に厳密な意味をもつ．

8. f を問題 7 の関数とし，これを位置座標空間 $\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{x}}$ 上の関数と考える．$\phi(t, \cdot)$ を時刻 t のハイゼンベルク場とする ((12.98a) 式)．

(i)　任意の $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \Omega_\varrho, \phi(t, f_{\varepsilon,\boldsymbol{x}}) \Omega_\varrho \rangle$$

は存在し，

$$\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\varrho}(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{k}^2 + m^2} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{k}$$

であることを示せ．

(ii)　(i) を用いて

$$(-\Delta + m^2)\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle = \varrho(\boldsymbol{x})$$

を導け．

(iii)　$d = 3$ とする．このとき，

$$\langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} V_m(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \varrho(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

であることを示せ．ここで，V_m は湯川ポテンシャルである ((12.104) 式)．さらに，$\operatorname{supp} \varrho$ が有界で，$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1$ ならば，

$$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \Big\{ \langle \phi(t, \boldsymbol{x}) \rangle + V_m(\boldsymbol{x}) \Big\} = 0$$

を示せ.

9. f を問題 7 の関数とし, $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_l \in \mathbb{R}^d$ はたがいに異なるとする. $\delta := \min_{i \neq j} |\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j| > 0$ とおき, $0 < \varepsilon < \delta/2$ とする. 任意の $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\tilde{f}_{\varepsilon,\boldsymbol{p}} = \frac{\varepsilon^{d/2}}{\|f\|} f_{\varepsilon,\boldsymbol{p}}$$

とおく.

(i) $\{\tilde{f}_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_j}\}_{j=1}^l$ は $L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ の正規直交系であることを示せ.

(ii) 問題 6 において, $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$, $T = \omega$, $g = -\hat{\varrho}/\sqrt{\omega}$ の場合を考え, $\mathscr{N}_0$ の元で 0 でない成分が $n_{i_1} = m_1, \cdots, n_{i_l} = m_l$ であるものを $\boldsymbol{m}$ とし, $f_{i_j} = \tilde{f}_{\varepsilon,\boldsymbol{p}_j}$ $(j = 1, \cdots, l)$ とおく. このとき,

$$P(\boldsymbol{m}) \sim \left(\frac{\varepsilon^d}{\|f\|^2}\right)^{m_1+\cdots+m_l} e^{-\overline{N}} \prod_{j=1}^{l} \frac{\bar{n}(\boldsymbol{p}_j)^{m_j}}{m_j!}, \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

を示せ. ここで,

$$\overline{N} := \langle \Omega_\varrho, N_{\mathrm{b}} \Omega_\varrho \rangle = \frac{1}{2} \left\| \frac{\hat{\varrho}}{\omega^{3/2}} \right\|^2.$$

第 13 章

粒子と量子場の相互作用モデル

非相対論的粒子と量子場が相互作用するモデルを叙述し，得られている諸結果を概観する．

13-1 節　はじめに

この章では，非相対論的粒子の多体系と量子場が相互作用をするモデルの基本的なものについて初等的な部分を論述する．これらのモデルは，量子場の数学的理論の最近の研究の中で重要な位置をしめるものである．

d 次元空間の中を N 個の非相対論的粒子が運動する系を考える．この系の配位空間 (位置座標空間) は $\mathbb{R}^{dN} := \{x = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \,|\, \boldsymbol{x}_j \in \mathbb{R}^d,\, j = 1, \cdots, N\}$ である．この意味での $\mathbb{R}^{dN}$ をしばしば $\mathbb{R}_x^{dN}$ とも記す (8 章，8-2 節，8-2-1 項のはじめを参照)．系にはポテンシャル $V : \mathbb{R}^{dN} \longrightarrow \mathbb{R}$ が働いているとしよう．系の状態のヒルベルト空間として，$L^2(\mathbb{R}_x^{dN})$ をとる．このとき，系のハミルトニアンは**シュレーディンガー作用素**

$$H_{\mathrm{p}} := -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j} \Delta_{\boldsymbol{x}_j} + V \tag{13.1}$$

であたえられる．ただし，$m_j > 0$ は j 番目の粒子の質量を表し，$\Delta_{\boldsymbol{x}_j}$ は，変数 $\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{R}^d$ に関する，d 次元の一般化されたラプラシアンである．なお，H_{p} の下付き字「p」は「particle」(粒子) に言及するものである．

これから考察するのは，これらの粒子がボース場 (ボソンの量子場) と相互作用をするような量子系である．ボース場としては，スカラー量子場と量子輻射場 (電磁場) を考える．ボース場で記述される系の状態のヒルベルト空間として，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$

上のボソンフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ をとる．スカラー場の場合は，$\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$，電磁場の場合は，$\mathscr{H}=\overset{d-1}{\oplus}L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ $(d\geq 2)$ である．粒子とボース場が相互作用をしない量子系のヒルベルト空間として

$$\mathscr{F}_N(\mathscr{H}):=L^2(\mathbb{R}^{dN}_{\boldsymbol{x}})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \tag{13.2}$$

がとれる．この章では，粒子とボース場の相互作用がこのヒルベルト空間の中で定義される場合のみを考察する．相互作用がテンソル積 $A\otimes B$ の和の形で記述される場合は，相互作用を定義するのに特に困難はない．だが，そうでない場合の相互作用を数学的に厳密に定義するには少し準備をしなければならない．

13-2 節　準備 — 定ファイバー直積分

13-2-1　定ファイバー直積分と分解可能作用素

1 章で見たように，ヒルベルト空間 $\mathscr{F}_N(\mathscr{H})$ は

$$\mathscr{F}_N(\mathscr{H})=L^2(\mathbb{R}^{dN}_{\boldsymbol{x}};\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})) \tag{13.3}$$

というふうに自然な形で同一視される (定理 1-12，(1.27a) 式を参照)．この同一視を用いて，$\mathscr{F}_N(\mathscr{H})$ 上に，粒子と量子場の相互作用を定義することを考える．そこで，より一般的な考察をしておく．

(X,μ) を測度空間，$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間とする．

もし，μ が点測度で，$\mu_n(x)=\sum_{i=1}^n\delta(x-x_j)$ ($x_j\in X$ $(j=1,\cdots,n)$ は定点，$\delta(x-x_j)$ は点 x_j に質量をもつデルタ測度) の形をしているならば，$f\in L^2(X,d\mu_m;\mathscr{K})$ に対して，$(f(x_1),\cdots,f(x_n))\in\overset{n}{\oplus}\mathscr{K}$ を対応させることにより，$L^2(X,d\mu_n;\mathscr{K})$ は $\overset{n}{\oplus}\mathscr{K}$ と同型である．この意味で，$L^2(X,d\mu_n;\mathscr{K})=\overset{n}{\oplus}\mathscr{K}$ が成り立つ．

そこで，一般の μ に関しても，$L^2(X,d\mu;\mathscr{K})$ の元 ψ を，$x\in X$ ごとのベクトル値 $\psi(x)\in\mathscr{K}$ のあつまり $\psi=(\psi(x))_{x\in X}$ とみなし，$L^2(X,d\mu;\mathscr{K})$ をある種の直和と考えることができる．この観点の意味で，

$$\mathscr{K}_X:=L^2(X,d\mu;\mathscr{K})=\int_X^{\oplus}\mathscr{K}\,d\mu \tag{13.4}$$

と書き，これを**ファイバーを $\mathscr{K}$ とする，(X,μ) 上の定ファイバー直積分** (constant fibre direct integral) という．この表示は，X の点よりもむしろファイバー $\mathscr{K}$ に強調をおくために用いられる．

定義 13-1

(i)　X から $\mathfrak{B}(\mathscr{K})$ ($\mathscr{K}$ 上の有界線形作用素の全体) への写像 $A(\cdot)$ は，各 $\psi, \phi \in \mathscr{K}$ に対して，X 上の複素数値関数 $\langle \phi, A(\cdot)\psi \rangle$ が可測であるとき，**可測である**という．

(ii)　可測な写像：$A : X \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ で

$$\|A\|_\infty := \text{ess.sup}\|A(x)\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{K})} < \infty$$

をみたすものの全体を $L^\infty(X, d\mu; \mathfrak{B}(\mathscr{K}))$ で表す．ただし，$L^\infty(X, d\mu; \mathfrak{B}(\mathscr{K}))$ の元 A, B に関する相等は，$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A(x) = B(x)$ μ-a.e.x によって定義される．

定義 13-2　$\mathscr{K}_X = \int_X^\oplus \mathscr{K}\, d\mu$ 上の有界線形作用素 A について，$L^\infty(X, d\mu; \mathfrak{B}(\mathscr{K}))$ の元 $A(\cdot)$ が存在し，任意の $\psi \in \mathscr{K}_X$ に対して

$$(A\psi)(x) = A(x)\psi(x) \quad \text{a.e.}x \tag{13.5}$$

が成立するとき，A は**分解可能である** (decomposable) といい，

$$A = \int_X^\oplus A(x)\, d\mu(x)$$

と記す．$A(x)$ は A のファイバーとよばれる．

定理 13-3　任意の $A(\cdot) \in L^\infty(X, d\mu; \mathfrak{B}(\mathscr{K}))$ に対して，分解可能な作用素 $A \in \mathfrak{B}(\mathscr{K}_X)$ が一意的に存在して，(13.5) が成立する．さらに，

$$\|A\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{K}_X)} \le \|A(\cdot)\|_\infty. \tag{13.6}$$

証明　まず，任意の $\psi \in \mathscr{K}_X$ に対して，写像：$x \longrightarrow A(x)\psi(x)$ が可測であることを示さなければならない．$\{e_k\}_{k=1}^\infty$ を $\mathscr{K}$ の CONS とする．このとき，任意の $\phi \in \mathscr{K}$ に対して，$\langle \phi, A(x)\psi(x) \rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle \phi, A(x)e_k \rangle \langle e_k, \psi(x) \rangle$ (a.e.x)．$A(\cdot)$ の可測性の定義により，関数 $\langle \phi, A(\cdot)e_k \rangle$ は可測であり，$\langle e_k, \psi(\cdot) \rangle$ も可測であるから，$A(\cdot)\psi(\cdot)$ は可測である．したがって，$\mathscr{K}_X$ 上の作用素 A を (13.5) によって定義できる．これに関して，

$$\begin{aligned}\|A\psi\|^2 &= \int_X \|A(x)\psi(x)\|^2\, d\mu(x) \\ &\le \int_X \|A(x)\|^2_{\mathfrak{B}(\mathscr{K})} \|\psi(x)\|^2\, d\mu(x) \\ &\le \|A\|^2_\infty \int_X \|\psi(x)\|^2 d\mu(x) = \|A\|_\infty \|\psi\|^2.\end{aligned}$$

したがって，A は有界であり，(13.6) が成り立つ．

（一意性）別に分解可能な有界作用素 $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_X)$ が存在して，$B = \int_X^{\oplus} A(x)\,d\mu(x)$ とすれば，任意の $\psi \in \mathscr{H}_X$ に対して，$(A\psi)(x) = (B\psi)(x)$, a.e.x．したがって，$A\psi = B\psi$．ゆえに $A = B$． □

注意 13-1 実は，$\|A\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{H}_X)} = \|A(\cdot)\|_\infty$ が成り立つ．Reed and Simon (1978), p.281，Theorem XIII.83 を参照．

次に，$A(\cdot)$ が X から $\mathfrak{L}(\mathscr{H})$ ($\mathscr{H}$ 上の線形作用素の全体) への写像で，$A(x)$ が必ずしも有界でない場合を考察する．この場合に，この写像に同伴する作用素 A を次のように定義する．

$$D(A) := \left\{ \psi \in \mathscr{H}_X \;\middle|\; \text{a.e.}x \text{ に対して，} \psi(x) \in D(A(x)) \text{ かつ } A(\cdot)\psi(\cdot) \text{ は可測かつ } \int_X \|A(x)\psi(x)\|^2\,d\mu(x) < \infty \right\},$$

$$(A\psi)(x) := A(x)\psi(x), \quad \text{a.e.}x, \quad \psi \in D(A).$$

こうして定義される作用素 A を $A = \int_X^{\oplus} A(x)\,d\mu(x)$ と記す．

いま定義した作用素 A が自己共役になる条件を考察する．

定義 13-4 $A(\cdot) : X \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ について，a.e.x に対して，$A(x)$ が自己共役であるとき，$A(\cdot)$ を**自己共役作用素値写像**という．

自己共役作用素値写像 $A(\cdot)$ に対して，$(A(\cdot)+i)^{-1} : X \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ が可測であるならば，$A(\cdot)$ は可測であるという．

定理 13-5 $A(\cdot) : X \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathscr{H})$ を可測な自己共役作用素値写像とする．このとき，$A = \int_X^{\oplus} A(x)\,d\mu(x)$ は自己共役である．

証明 $(A(\cdot)+i)^{-1}$ の可測性は，$(A(\cdot)-i)^{-1} = \big((A(\cdot)+i)^{-1}\big)^*$ の可測性を意味する．したがって，定理 13-3 によって，有界な分解可能作用素 $C_\pm := \int_X^{\oplus} (A(x) \pm i)^{-1} d\mu(x)$ が定義される．任意の $\phi \in \mathscr{H}_X$ に対して，

$$A(x)(A(x)+i)^{-1}\phi(x) = \phi(x) - i(A(x)+i)^{-1}\phi(x)$$

であるから，$A(x)(A(x)+i)^{-1}\phi(x)$ は可測であり，

$$\int_X \|A(x)(A(x)+i)^{-1}\phi(x)\|^2\,d\mu(x) \le 2(\|\phi\|^2 + \|C_+\phi\|^2) < \infty.$$

したがって，$C_+\phi \in D(A)$ であり，直接計算により，$(A+i)C_+\phi = \phi$ が得られる．したがって，$(A+i)C_+ = 1$．同様に，$(A-i)C_- = 1$ を示すことができる．したがって，$\mathrm{Ran}\,(A\pm i) = \mathscr{H}_X$．これらの事実から $D(A)$ が稠密であることもわかる[1]．A のエルミート性を示すのは容易である．よって，対称作用素の自己共役性に関する基本的判定条件によって，A は自己共役である．□

13-2-2　テンソル積作用素との対応

$\mathscr{H}_X$ は $L^2(X,d\mu)\otimes\mathscr{H}$ と自然な同型対応をもつ (定理 1-12)．この同型のもとで $L^2(X,d\mu)\otimes\mathscr{H}$ のテンソル積作用素がどのように対応するかを見ておく．U : $L^2(X,d\mu)\otimes\mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H}_X$ を自然な同型対応とする．

S を $L^2(X,d\mu)$ 上の稠密に定義された閉作用素とし，

$$S_U := US\otimes IU^{-1} \tag{13.7}$$

とおく．部分空間

$$D(S)\cdot\mathscr{H} := \mathscr{L}\{f\times u\,|\,f\in D(S), u\in\mathscr{H}\} \tag{13.8}$$

を定義域とする，$\mathscr{H}_X$ 上の作用素 $S_{U,0}$ を

$$S_{U,0}(f\times u) := Sf\times u, \quad f\in D(S),\ u\in\mathscr{H}, \tag{13.9}$$

によって定義する ($D(S)\cdot\mathscr{H}$ の任意元には線形性によって拡張する)．作用素 S_U は次のように同定される．

命題 13-6

$$D(S_U) = \left\{\psi\in\mathscr{H}_X \;\middle|\; \{\psi_n\}_n \subset D(S)\cdot\mathscr{H} \text{ があって } \psi = \lim_{n\to\infty}\psi_n \right.$$
$$\left. \text{および } \{S_{U,0}\psi_n\}_n \text{ は } \mathscr{H}_X \text{ の収束列}\right\}, \tag{13.10a}$$

$$S_U\psi = \lim_{n\to\infty} S_{U,0}\psi_n, \quad \psi\in D(S_U). \tag{13.10b}$$

---

[1] $\phi\in D(A)^\perp$ とすれば，任意の $\psi\in D(A)$ に対して，$0=\langle\phi,\psi\rangle=\langle(A+i)C_+\phi,\psi\rangle=\langle C_+\phi,(A-i)\psi\rangle$．これと $\mathrm{Ran}\,(A-i)=\mathscr{H}_X$ より，$C_+\phi=0$．両辺に $A+i$ を作用させれば，$\phi=0$ がしたがう．

証明 (13.10a) の右辺の集合を D とする．任意の $\psi \in D(S_U)$ に対して，$U^{-1}\psi \in D(S \otimes I)$ であり，$D(S)\hat{\otimes}\mathscr{K}$ は $S \otimes I$ の芯であるから，$\{\phi_n\}_n \subset D(S)\hat{\otimes}\mathscr{K}$ で，$\phi_n \longrightarrow U^{-1}\psi$, $S \otimes I\phi_n \longrightarrow S \otimes IU^{-1}\psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ をみたすものが存在する．そこで，$U\phi_n = \psi_n$ とおけば，$\psi_n \in D(S)\cdot\mathscr{K}$ であり，$\psi_n \longrightarrow \psi$, $S_U\psi_n \longrightarrow S_U\psi$ $(n \longrightarrow \infty)$ が成り立つ．$S_U\psi_n = S_{U,0}\psi_n$ であるから，$\psi \in D$ であり，(13.10b) が成り立つ．したがって，$D(S_U) \subset D$．逆に，$\psi \in D$ として，ψ_n を (13.10a), (13.10b) のものとすれば，$U^{-1}\psi_n \in D(S)\hat{\otimes}\mathscr{K}$ と $S \otimes I$ の閉性により，$U^{-1}\psi \in D(S \otimes I)$．ゆえに，$\psi \in D(S_U)$． □

$L^2(X, d\mu) \otimes \mathscr{K}$ と $\mathscr{K}_X$ の自然な同一視において，命題 13-6 の意味で，S_U はしばしば単に S と記される．

T を $\mathscr{K}$ 上の自己共役作用素とする．T は X から $\mathfrak{L}(\mathscr{K})$ への定値な自己共役作用素値写像とみることができる．この写像は明らかに可測である．したがって，定理 13-5 によって，

$$\int_X^{\oplus} T\,d\mu(x)$$

は自己共役である．

命題 13-7 $\mathscr{K}$ 上の任意の自己共役作用素 T に対して，

$$UI \otimes TU^{-1} = \int_X^{\oplus} T\,d\mu(x).$$

証明 $D := L^2(X, d\mu)\hat{\otimes}D(T)$ 上で $I \otimes T = U^{-1}\int_X^{\oplus} T\,d\mu(x)U$ が成立することは容易にわかる．したがって，$I \otimes T \restriction D \subset U^{-1}\int_X^{\oplus} T\,d\mu(x)U$．$D$ は $I \otimes T$ の芯であるから，$I \otimes T \subset U^{-1}\int_X^{\oplus} T\,d\mu(x)U$．$I \otimes T$ は自己共役であるから，$I \otimes T = U^{-1}\int_X^{\oplus} T\,d\mu(x)U$ でなければならない．したがって，題意が成立する． □

13-2-3 簡単な応用

(13.2) によって定義されるヒルベルト空間 $\mathscr{F}_N(\mathscr{H})$ は，同一視 (13.3) のもとで，ファイバーを $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ とする，$(\mathbb{R}_x^{dN}, dx)$ 上の定ファイバー直積分

$$\mathscr{F}_N(\mathscr{H}) = \int_{\mathbb{R}_x^{dN}}^{\oplus} \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})\, dx \tag{13.11}$$

とみなせる．定理 13-5 をこのヒルベルト空間で働くあるクラスの作用素に応用しよう．

$G : \mathbb{R}^{dN} \longrightarrow \mathscr{H}$ を $\mathbb{R}^{dN}$ 上の強連続な $\mathscr{H}$-値関数とする ($x \in \mathbb{R}^{dN}$ に対して，$G(x) \in \mathscr{H}$)．$\Phi_{\mathrm{S}}(f)$ ($f \in \mathscr{H}$) を $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の Segal の場の作用素とする．このとき，$\mathscr{F}_N(\mathscr{H})$ 上の作用素

$$\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(G) := \int_{\mathbb{R}_x^{dN}}^{\oplus} \Phi_{\mathrm{S}}(G(x))\, dx \tag{13.12}$$

が定義される．

命題 13-8 $\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(G)$ は自己共役である．

証明 $(\Phi_{\mathrm{S}}(G(\cdot)) + i)^{-1}$ が可測であることを示せばよい．このとき，定理 13-5 の応用により，題意がしたがう．

$x \in \mathbb{R}^{dN}$ を任意にとり，$x_n \in \mathbb{R}^{dN}$ を x に収束する任意の点列とする．G の強連続性により，$\|G(x_n) - G(x)\|_{\mathscr{H}} \longrightarrow 0$ ($n \longrightarrow \infty$)．したがって，任意の $\Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ に対して，$\Phi_{\mathrm{S}}(G(x_n))\Psi \longrightarrow \Phi_{\mathrm{S}}(G(x))\Psi$ ($n \longrightarrow \infty$)．$\mathscr{F}_{\mathrm{b},0}(\mathscr{H})$ は $\Phi_{\mathrm{S}}(G(x))$ の芯であるから，付録 B の定理 B-10 により，$\Phi_{\mathrm{S}}(G(x_n))$ は，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\Phi_{\mathrm{S}}(G(x))$ に強レゾルヴェント収束する．したがって，$\mathbb{R}_x^{dN}$ から $\mathfrak{B}(\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}))$ への写像 : $x \longrightarrow (\Phi_{\mathrm{S}}(G(x)) + i)^{-1}$ は強連続である．ゆえに，それは可測である． □

13-3 節 ある一般的なクラスのハミルトニアンの自己共役性とスペクトル

この節では，粒子と量子場に関する個々のモデルのハミルトニアンを包括する一般的なクラスの作用素を定義し，その自己共役性を証明する．さらに，スペクトルについて若干の考察を行う．

13-3-1　自己共役性

A を $L^2(\mathbb{R}_x^{dN})$ 上の自己共役作用素で，下に有界であるものとする．したがって，

$$\tilde{A} := A - E_0(A) \tag{13.13}$$

は非負の自己共役作用素である．ただし，$E_0(A) := \inf \sigma(A)$．作用素 A は，具体的な応用では，粒子系のハミルトニアンを表す[2)]．

T を $\mathscr{H}$ 上の単射な非負自己共役作用素とし，

$$H_0 := A + d\Gamma_{\rm b}(T) \tag{13.14a}$$

とおく[3)]．

$$\tilde{H}_0 := H_0 - E_0(A) = \tilde{A} + d\Gamma_{\rm b}(T) \tag{13.14b}$$

を導入する．これは $\mathscr{F}_N(\mathscr{H})$ 上の非負自己共役作用素である．

$J \in \mathbb{N}$ とし，各 $j = 1, \cdots, J$ に対して，g_j, h_j を $\mathbb{R}_x^{dN}$ 上の強連続な $\mathscr{H}$-値関数，B_j を $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上の対称作用素とする．また，$v = (v_{jk})_{j,k=1,\cdots,J}$ を J 次のエルミート行列とする．

次の形の作用素 H を考える：

$$H := H_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\{B_j \Phi_{\rm S}^{\oplus}(g_j) + \Phi_{\rm S}^{\oplus}(g_j) B_j\right\} + \sum_{j,k=1}^{J} v_{jk} \Phi_{\rm S}^{\oplus}(h_j) \Phi_{\rm S}^{\oplus}(h_k). \tag{13.15}$$

この作用素は，粒子と量子場の相互作用のモデルのハミルトアニンの一般的なクラスの 1 つを定義するものである (具体的な例は，13-4 節 ∼13-6 節で論じる)．線形作用素の摂動論の観点からは，H において，H_0 が無摂動作用素であり，残りの部分が摂動 (粒子と量子場の相互作用) である．だが，H が実際に量子系のハミルトニアンであるためには，量子力学の公理によって，それは自己共役または本質的に自己共役でなければならない．あるいは適当な自己共役拡大をもつ必要がある．以下の目的は，ある条件のもとで，H が自己共役であることを証明することである．

次の仮定をおく：

仮定 (A)

[2)] 一例は，$A = H_{\rm p}$ ((13.1) 式を参照) であたえられる．

[3)] (13.2) の形で $\mathscr{F}_N(\mathscr{H})$ を考える場合には，H_0 は $A \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\rm b}(T)$ と同一視される．命題 13-6, 命題 13-7 を参照．

(A.1)　$D(\tilde{A}^{1/2}) \subset \bigcap_{j=1}^{J} D(B_j)$ であり，非負定数 a_j, b_j が存在して，

$$\|B_j u\|^2 \le a_j^2 \|\tilde{A}^{1/2} u\|^2 + b_j^2 \|u\|^2, \quad u \in D(\tilde{A}^{1/2})$$

が成り立つ．

(A.2)　$D(H_0) \subset \bigcap_{j=1}^{J} D\left([B_j, \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)]\right)$ であり，非負定数 c_0, d_0 が存在して，

$$\left\| \sum_{j=1}^{J} [B_j, \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)]\Psi \right\| \le c_0 \|\tilde{H}_0 \Psi\| + d_0 \|\Psi\|, \quad \Psi \in D(H_0).$$

ボレル可測関数 $f : \mathbb{R}_x^{dN} \longrightarrow \mathscr{H}$ で，

$$\|f\|_{\mathscr{H},\infty} := \mathrm{ess.sup}_{x \in \mathbb{R}^{dN}} \|f(x)\|_{\mathscr{H}} < \infty \tag{13.16}$$

をみたすものの全体を $L^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H})$ で表す．

定義 13-9　$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．次の性質をみたす，$\mathbb{R}^{dN}$ 上の $\mathscr{H}$-値関数 g の全体の集合を $L_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H})$ と記す：

(i)　g は強連続で $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H})$．

(ii)　$g(x) \in D(T^{\alpha})$ $(x \in \mathbb{R}^{\nu N})$ かつ $T^{\alpha} g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H})$．ただし，$(T^{\alpha} g)(x) := T^{\alpha} g(x)$．

次の定理を証明する．

定理 13-10　(A) を仮定する．さらに，

$$g_j \in L_{-1/2}^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H}), \quad h_j \in L_{-1/2}^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H}) \cap L_{1/2}^{\infty}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H}),$$
$$j = 1, \cdots, J \tag{13.17}$$

であるとし，

$$C := \sum_{j=1}^{J} a_j \|T^{-1/2} g_j\|_{\mathscr{H},\infty} + \frac{c_0}{2}$$
$$+ 2 \sum_{j,k=1}^{J} |v_{jk}| \|T^{-1/2} h_j\|_{\mathscr{H},\infty} \|T^{-1/2} h_k\|_{\mathscr{H},\infty} < 1 \tag{13.18}$$

がみたされているとする．このとき，$D(H) = D(H_0)$ かつ H は自己共役であり，下に有界である．さらに，H は，H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役である．

ここで使う，定理 13-10 の証明のアイディアは，加藤-Rellich の定理を応用するこ

とである．そのためには，摂動項を H_0 を用いて評価しなければならない．以下の一連の補題はこの目的のためのものである．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$p_\varepsilon := \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) \tag{13.19}$$

を定義する．

補題 13-11 $f \in D(T^{-1/2}), \Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ とする．このとき，すべての $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi\|^2 \le (2+\varepsilon)\|T^{-1/2}f\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + p_\varepsilon\|f\|^2\|\Psi\|^2.$$

証明 命題 4-24 を用いると．

$$\begin{aligned}\|\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi\|^2 &\le \frac{1}{2}(\|A(f)\Psi\|^2 + \|A(f)^*\Psi\|^2) + \|A(f)\Psi\|\|A(f)^*\Psi\| \\ &\le 2\|T^{-1/2}f\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + \frac{1}{2}\|f\|^2\|\Psi\|^2 \\ &\quad + \|T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|\|f\|\|\Psi\|.\end{aligned}$$

初等的不等式 (12.16) によって，

$$\begin{aligned}&\|T^{-1/2}f\|\,\|d\Gamma(T)^{1/2}\Psi\|\,\|f\|\,\|\Psi\| \\ &\le \varepsilon\|T^{-1/2}f\|^2\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2\|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

したがって，求める不等式が得られる． □

補題 13-12 $g \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathscr{K})$ とする．このとき，$D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}) \subset D(\Phi_{\mathrm{S}}^\oplus(g))$ であり，すべての $\varepsilon > 0$ と $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}^\oplus(g)\Psi\|^2 \le (2+\varepsilon)\|T^{-1/2}g\|^2_{\mathscr{K},\infty}\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + p_\varepsilon\|g\|^2_{\mathscr{K},\infty}\|\Psi\|^2.$$

証明 補題 13-11 によって，すべての $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2})$ に対して，

$$\begin{aligned}\|\Phi_{\mathrm{S}}(g(x))\Psi(x)\|^2 &\le (2+\varepsilon)\|T^{-1/2}g(x)\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi(x)\|^2 \\ &\quad + p_\varepsilon\|g(x)\|^2\|\Psi(x)\|^2 \quad \text{a.e.}x.\end{aligned}$$

両辺を積分することにより，題意がしたがう． □

ベクトル値関数 $g \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{\nu N};\mathscr{H})$ と定数 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ に対して，非負定数 $c^{(j)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(g)$, $d^{(j)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(g)$ $(j = 1, \cdots, J)$ を次のように定義する：

$$c^{(j)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(g)^2 := \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) a_j^2 \|T^{-1/2} g\|^2_{\mathscr{H},\infty} + \varepsilon' \{ b_j^2 (2+\varepsilon) \|T^{-1/2} g\|^2_{\mathscr{H},\infty} + p_\varepsilon a_j^2 \|g\|^2_{\mathscr{H},\infty} \}, \tag{13.20a}$$

$$d^{(j)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(g)^2 := \frac{1}{4\varepsilon'} \{ (2+\varepsilon) b_j^2 \|T^{-1/2} g\|^2_{\mathscr{H},\infty} + p_\varepsilon a_j^2 \|g\|^2_{\mathscr{H},\infty} \} + p_\varepsilon b_j^2 \|g\|^2_{\mathscr{H},\infty}. \tag{13.20b}$$

補題 13-13　$g \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathscr{H})$ とし，条件 (A.1) を仮定する．このとき，$D(H_0) \subset \bigcap_{j=1}^{J} D(\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g) B_j)$ であり，すべての $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ および $\Psi \in D(H_0)$ に対して，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g) B_j \Psi\|^2 \le c^{(j)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(g)^2 \|\tilde{H}_0 \Psi\|^2 + d^{(j)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(g)^2 \|\Psi\|^2. \tag{13.21}$$

証明　$\Psi \in D(H_0)$ とする．補題 13-12 によって，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g) B_j \Psi\|^2 \le (2+\varepsilon) \|T^{-1/2} g\|^2_{\mathscr{H},\infty} \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} B_j \Psi\|^2 + p_\varepsilon \|g\|^2_{\mathscr{H},\infty} \|B_j \Psi\|^2. \tag{13.22}$$

(A.1) によって，

$$\begin{aligned} \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} B_j \Psi\|^2 &= \|B_j d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \Psi\|^2 \\ &\le a_j^2 \| \tilde{A}^{1/2} d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \Psi \|^2 + b_j^2 \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \Psi \|^2. \end{aligned}$$

容易にわかるように，

$$\| \tilde{A}^{1/2} d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \Psi \|^2 \le \frac{1}{2} \|\tilde{H}_0 \Psi\|^2.$$

シュヴァルツの不等式と (12.16) により，

$$\begin{aligned} \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \Psi\|^2 &\le \|\Psi\| \, \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \Psi \| \le \varepsilon' \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \Psi \|^2 + \frac{1}{4\varepsilon'} \|\Psi\|^2 \\ &\le \varepsilon' \|\tilde{H}_0 \Psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon'} \|\Psi\|^2. \end{aligned}$$

したがって，

$$\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} B_j \Psi \|^2 \le \left(\frac{a_j^2}{2} + \varepsilon' b_j^2 \right) \|\tilde{H}_0 \Psi\|^2 + \frac{b_j^2}{4\varepsilon'} \|\Psi\|^2 \tag{13.23}$$

を得る．容易に示される評価

$$\|\tilde{A}^{1/2}\Psi\|^2 \le \|\tilde{H}_0^{1/2}\Psi\|^2 \le \|\Psi\|\|\tilde{H}_0\Psi\|$$

$$\le \varepsilon'\|\tilde{H}_0\Psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon'}\|\Psi\|^2$$

と (A.1) によって，

$$\|B_j\Psi\|^2 \le a_j^2\left(\varepsilon'\|\tilde{H}_0\Psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon'}\|\Psi\|^2\right) + b_j^2\|\Psi\|^2.$$

この不等式と (13.23) を (13.22) に代入すれば，(13.21) が得られる． □

ハミルトニアン H における相互作用項を評価するために，

$$H_1 := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\{B_j\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j) + \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)B_j\right\}, \tag{13.24}$$

$$H_2 := \sum_{j,k=1}^{J} v_{jk}\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_j)\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k), \tag{13.25}$$

とおく．

補題 13-14 $g_j \in L^{\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathscr{H})$ $(j = 1,\cdots,J)$ とし，(A.1), (A.2) を仮定する．このとき，$D(H_0) \subset D(H_1)$ であり，すべての $\Psi \in D(H_0)$, ε, $\varepsilon' > 0$ に対して，

$$\|H_1\Psi\| \le \left(\sum_{j=1}^{J} c_{\varepsilon,\varepsilon'}^{(j)}(g_j) + \frac{c_0}{2}\right)\|\tilde{H}_0\Psi\| + \left(\sum_{j=1}^{J} d_{\varepsilon,\varepsilon'}^{(j)}(g_j) + \frac{d_0}{2}\right)\|\Psi\|. \tag{13.26}$$

証明 作用素 H_1 は $D(H_0)$ 上で次のように書ける：

$$H_1 = \sum_{j=1}^{J}\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)B_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}[B_j, \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)].$$

これと補題 13-13 および (A.2) から (13.26) が導かれる． □

作用素 H_2 を評価するために，第 2 量子化作用素と生成・消滅作用素に関する，ある一般的な事実を証明する．

補題 13-15 $\alpha > 0$ とする．

(i) 任意の $f \in D(T^{-1/2})$, $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2+\alpha})$ に対して，$A(f)\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{\alpha})$ であり，

$$\|\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{\alpha}A(f)\Psi\,\| \le \|\,T^{-1/2}f\|\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2+\alpha}\Psi\,\| \tag{13.27}$$

が成り立つ．

(ii)　定数 $c(\alpha)$ を次のように定義する：

$$c(\alpha) := \begin{cases} 2^{\alpha-1} & (\alpha \geq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (0 < \alpha \leq 1 \text{ のとき}). \end{cases} \tag{13.28}$$

$f \in D(T^{-1/2}) \cap D(T^{\alpha}), \Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2+\alpha})$ とする．このとき，$A(f)^*\Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(T)^{\alpha})$ であり，すべての $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} &\| d\Gamma_{\rm b}(T)^{\alpha} A(f)^* \Psi \|^2 \\ &\leq c(\alpha)^2 (1+\varepsilon) \big(\|T^{-1/2} f\|^2 \|d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2+\alpha} \Psi\|^2 + \|f\|^2 \|d\Gamma_{\rm b}(T)^{\alpha}\Psi\|^2 \big) \\ &\quad + c(\alpha)^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\|T^{-1/2+\alpha} f\|^2 \|d\Gamma_{\rm b}(T)^{1/2}\Psi\|^2 + \|T^{\alpha} f\|^2 \|\Psi\|^2 \right) \end{aligned} \tag{13.29}$$

が成り立つ．

証明　スペクトル定理により，有限測度空間 (M, μ) とユニタリ作用素 $U : \mathscr{H} \longrightarrow L^2(M, d\mu)$ および M 上の実数値可測関数 h (μ-a.e. 有限) で

(i)　$f \in D(T) \Longleftrightarrow h(\cdot)(Uf)(\cdot) \in L^2(M, d\mu)$,

(ii)　すべての $g \in U(D(T))$ に対して，$(UTU^{-1}g)(m) = h(m)g(m)$, μ-a.e.$m \in M$.

をみたすものが存在する (定理 2-30 を参照)．T の単射性と $T \geq 0$ から， $h(m) > 0$, μ-a.e.$m \in M$．U に対する第 2 種の第 2 量子化作用素 $\Gamma(U) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes^{n} U$ は，$\mathscr{F}_{\rm b}(\mathscr{H})$ から $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(M, d\mu))$ へのユニタリ作用素である．$\hat{a}(\cdot)$ によって，$\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(M, d\mu))$ 上の消滅作用素を表す．したがって，

$$\hat{a}(Uf) = \Gamma(U) A(f) \Gamma(U)^{-1}, \quad f \in \mathscr{H}$$

であり，すべての $\Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in D(\hat{a}(v))$ ($v \in L^2(M, d\mu)$) と $n \geq 0$ に対して，

$$(\hat{a}(v)\Psi)^{(n)}(m_1, \cdots, m_n) = \sqrt{n+1} \int_M v(m)^* \Psi^{(n+1)}(m, m_1, \cdots, m_n)\, d\mu(m)$$

が成り立つ (例 4-2 を参照)．また，

$$d\Gamma_{\rm b}(h) = \Gamma(U) d\Gamma_{\rm b}(T) \Gamma(U)^{-1}.$$

一般に，測度空間 (X, ν) に関する L^2 空間 $L^2(X, d\nu)$ 上の ν-a.e. 有限な非負値可

測関数 F によるかけ算作用素 M_F は非負自己共役であり，任意の $\alpha > 0$ に対して，M_F^α は関数 $F(\cdot)^\alpha$ によるかけ算作用素 M_{F^α} に等しい[4]．したがって，$d\Gamma_{\rm b}(h)^\alpha$ は n 粒子空間上では，関数 $\left(\sum_{j=1}^n h(m_j)\right)^\alpha$ によるかけ算作用素である．ゆえに，$v \in D(h^{-1/2}), \Psi \in D(d\Gamma_{\rm b}(h)^{1/2+\alpha})$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
&|\,(d\Gamma_{\rm b}(h)^\alpha \hat{a}(v)\Psi)^{(n)}(m_1,\cdots,m_n)\,|^2 \\
&\le \left(\sum_{j=1}^n h(m_j)\right)^{2\alpha}(n+1) \\
&\quad \times \left(\int_M \frac{|v(m)|}{\sqrt{h(m)}}\sqrt{h(m)}|\Psi^{(n+1)}(m,m_1,\cdots,m_n)|\,d\mu(m)\right)^2 \\
&\le \left(\sum_{j=1}^n h(m_j)\right)^{2\alpha}(n+1)\left(\int_M \frac{|v(m)|^2}{h(m)}\,d\mu(m)\right) \\
&\quad \times \left(\int_M h(m)|\Psi^{(n+1)}(m,m_1,\cdots,m_n)|^2\,d\mu(m)\right).
\end{aligned}
$$

ここで，シュヴァルツの不等式を用いた．したがって，

$$
\begin{aligned}
&\|\,(d\Gamma_{\rm b}(h)^\alpha \hat{a}(v)\Psi)^{(n)}\,\|^2 \\
&\le \|h^{-1/2}v\|^2(n+1)\int_{M^{n+1}}\left(\sum_{j=1}^n h(m_j)\right)^{2\alpha} h(m) \\
&\quad \times |\,\Psi^{(n+1)}(m,m_1,\cdots,m_n)\,|^2\,d\mu(m)d\mu(m_1)\cdots d\mu(m_n) \\
&= \|h^{-1/2}v\|^2\int_{M^{n+1}}\left(\sum_{j=1}^n h(m_j)\right)^{2\alpha}\left(h(m)+\sum_{k=1}^n h(m_k)\right) \\
&\quad \times |\,\Psi^{(n+1)}(m,m_1,\cdots,m_n)\,|^2\,d\mu(m)d\mu(m_1)\cdots d\mu(m_n)
\end{aligned}
$$

---

[4] M_F のスペクトル測度を E_F とすれば，任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して，$\|E_F(B)\psi\|^2 = \int_{F(x)\in B}|\psi(x)|^2\,d\nu(x)$ である (証明は，新井 (1997a) の 3 章，練習問題 10 と同様)．したがって，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f と $\psi, \phi \in L^2(X, d\nu)$ (ただし，$\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda)|^2\,d\|E_F(\lambda)\psi\|^2 < \infty$ とする) に対して，

$$\int_X f(F(x))\psi(x)^*\phi(x)\,d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,d\langle\psi, E_F(\lambda)\phi\rangle.$$

これを $f(\lambda) = \lambda^\alpha$ として応用すれば，主張が証明される．

$(\because \Psi^{(n+1)}$ の置換対称性)

$$\le \|h^{-1/2}v\|^2 \int_{M^{n+1}} \left(h(m) + \sum_{k=1}^n h(m_k) \right)^{2\alpha+1}$$

$$\times \, |\Psi^{(n+1)}(m, m_1, \cdots, m_n)|^2 \, d\mu(m) d\mu(m_1) \cdots d\mu(m_n)$$

$$= \|h^{-1/2}v\|^2 \, \| (d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{1/2+\alpha}\Psi)^{(n+1)} \|^2.$$

これは，$\hat{a}(v)\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^\alpha)$ および

$$\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^\alpha \hat{a}(v)\Psi \| \le \|h^{-1/2}v\| \, \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{1/2+\alpha}\Psi \|,$$

を意味する．したがって，(13.27) を得る．

生成作用素 $\hat{a}(v)^*$ $(v \in L^2(M, d\mu))$ については，まず，すべての $\Psi \in D(\hat{a}(v)^*)$ に対して，

$$(\hat{a}(v)^*\Psi)^{(0)} = 0,$$

$$(\hat{a}(v)^*\Psi)^{(n)}(m_1, \cdots, m_n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n v(m_j)\Psi^{(n-1)}(m_1, \cdots, m_{j-1}, m_{j+1}, \cdots, m_n), \quad n \ge 1.$$

$v \in D(h^\alpha) \cap D(h^{-1/2})$, $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(h))$ とする．このとき，

$$|(d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^\alpha \hat{a}(v)^*\Psi)^{(n)}(m_1, \cdots, m_n)|$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n h(m_k) \right)^\alpha \sum_{j=1}^n |v(m_j)| \, |\Psi^{(n-1)}(m_1, \cdots, m_{j-1}, m_{j+1}, \cdots, m_n)|.$$

初等的な不等式

$$(a+b)^\alpha \le c(\alpha) \, (a^\alpha + b^\alpha) \tag{13.30}$$

を，$a = h(m_j)$, $b = \sum_{k \ne j}^n h(m_k)$ として応用すれば，

$$\left(\sum_{k=1}^n h(m_k) \right)^\alpha |\Psi^{(n-1)}(m_1, \cdots, m_{j-1}, m_{j+1}, \cdots, m_n)|$$

$$\le c(\alpha) h(m_j)^\alpha |\Psi^{(n-1)}(m_1, \cdots, m_{j-1}, m_{j+1}, \cdots, m_n)|$$

$$+ \, c(\alpha) |(d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^\alpha \Psi)^{(n-1)}(m_1, \cdots, m_{j-1}, m_{j+1}, \cdots, m_n)|.$$

したがって，

$$|(d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{\alpha}\hat{a}(v)^*\Psi)^{(n)}| \le c(\alpha)\big\{(\hat{a}(h^{\alpha}|v|)^*|\Psi|)^{(n)} + (\hat{a}(|v|)^*|d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{\alpha}\Psi|)^{(n)}\big\}.$$

ただし，$|\Psi| := \{|\Psi^{(n)}|\}_{n=0}^{\infty}$．これと不等式

$$(a+b)^2 \le (1+\varepsilon)a^2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)b^2, \quad a,\, b \ge 0,\, \varepsilon > 0,$$

によって，

$$\begin{aligned}
&\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{\alpha}\hat{a}(v)^*\Psi \|^2 \\
&\le c(\alpha)^2\left\{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\| \hat{a}(h^{\alpha}|v|)^*|\Psi|\,\|^2 + (1+\varepsilon)\| \hat{a}(|v|)^*|d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{\alpha}\Psi|\,\|^2\right\} \\
&\le c(\alpha)^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\big(\|h^{-1/2+\alpha}v\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{1/2}\Psi\|^2 + \|h^{\alpha}v\|^2\|\Psi\|^2\big) \\
&\quad + c(\alpha)^2(1+\varepsilon)\big(\|h^{-1/2}v\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{1/2+\alpha}\Psi\|^2 + \|v\|^2\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(h)^{\alpha}\Psi\|^2\big).
\end{aligned}$$

これは (13.29) を意味する． □

各 ε, $\varepsilon_j > 0$ $(j=1,2,3)$, $f \in D(T^{1/2}) \cap D(T^{-1/2})$ に対して，

$$q_{\varepsilon} := \left(2+\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \tag{13.31a}$$

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3;f) &:= \left(1+\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{1+\varepsilon}+\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\|T^{-1/2}f\|^2 \\
&\quad + \frac{q_{\varepsilon}^2\varepsilon_3}{4}\left(2+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|f\|^2,
\end{aligned} \tag{13.31b}$$

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3;f) &:= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_2}\right)\|T^{1/2}f\|^2 \\
&\quad + \frac{q_{\varepsilon}^2}{4}\left(2+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{1}{4\varepsilon_3}\|f\|^2
\end{aligned} \tag{13.31c}$$

とおく．

補題 13-16　$f \in D(T^{1/2}) \cap D(T^{-1/2})$ とする．このとき $D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \subset D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Phi_{\mathrm{S}}(f))$ であり，すべての $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$, ε, ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi \|^2 \\
&\le E(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3;f)\,\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi \|^2 + F(\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3;f)\|\Psi\|^2.
\end{aligned} \tag{13.32}$$

証明　補題 13-15 を $\alpha = 1/2$ として応用すれば,

$$\begin{aligned}
&\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} \Phi_{\mathrm{S}}(f)\Psi \|^2 \\
&\le \frac{1}{2}(\| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} A(f)^*\Psi \|^2 + \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} A(f)\Psi \|^2) \\
&\quad + \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} A(f)^*\Psi \| \| d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2} A(f)\Psi \| \\
&\le \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{1+\varepsilon}\right) \|T^{-1/2} f\|^2 \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\|^2 + \frac{q_\varepsilon^2}{2} \|f\|^2 \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|T^{1/2} f\|^2 \|\Psi\|^2 + q_\varepsilon \|T^{-1/2} f\| \|f\| \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Psi\| \\
&\quad + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \|T^{-1/2} f\| \|T^{1/2} f\| \|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| \|\Psi\|.
\end{aligned}$$

次の評価に注意する：

$$\begin{aligned}
&q_\varepsilon \|T^{-1/2} f\| \|f\| \|d\Gamma(T)\Psi\| \|d\Gamma(T)^{1/2}\Psi\| \\
&\le \varepsilon_1 \|T^{-1/2} f\|^2 \|d\Gamma(T)\Psi\|^2 + \frac{q_\varepsilon^2}{4\varepsilon_1} \|f\|^2 \|d\Gamma(T)^{1/2}\Psi\|^2, \\
&\sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}} \|T^{-1/2} f\| \|T^{1/2} f\| \|d\Gamma(T)\Psi\| \|\Psi\| \\
&\le \varepsilon_2 \|T^{-1/2} f\|^2 \|d\Gamma(T)\Psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|T^{1/2} f\|^2 \|\Psi\|^2, \\
&\|d\Gamma(T)^{1/2}\Psi\|^2 \le \|\Psi\| \|d\Gamma(T)\Psi\| \le \varepsilon_3 \|d\Gamma(T)\Psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_3} \|\Psi\|^2.
\end{aligned}$$

これらの評価から (13.32) が得られる. □

各正数 t, ε_1, ε_2, ε_3 に対して,

$$E_j(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) := \sup_{x \in \mathbb{R}^{dN}} E(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; h_j(x)), \tag{13.33a}$$

$$F_j(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) := \sup_{x \in \mathbb{R}^{dN}} F(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; h_j(x)), \tag{13.33b}$$

とおく.

補題 13-17　$h_j \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H}) \cap L^\infty_{1/2}(\mathbb{R}^{dN}; \mathscr{H})$ $(j = 1, \cdots, J)$, s, t, r, ε, $\varepsilon_l > 0$ $(l = 1, 2, 3)$, $\Psi \in D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ とする. このとき, $\Psi \in D(\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_j)\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k))$ $(j, k = 1, \cdots, J)$ であり,

$$\begin{aligned}
&\| \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_j)\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k)\Psi \|^2 \\
&\le \{(2+\varepsilon)\|T^{-1/2}h_j\|^2_{\mathscr{H},\infty}E_k(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)+r\}\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\|^2 \\
&\quad + \left\{(2+\varepsilon)\|T^{-1/2}h_j\|^2_{\mathscr{H},\infty}F_k(t,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4r}p_\varepsilon^2(2+s)^2\|h_j\|^4_{\mathscr{H},\infty}\|T^{-1/2}h_k\|^4_{\mathscr{H},\infty} + p_\varepsilon p_s\|h_j\|^2_{\mathscr{H},\infty}\|h_k\|^2_{\mathscr{H},\infty}\right\}\|\Psi\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明　補題 13-12 によって，

$$\|\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_j)\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k)\Psi\|^2 \le (2+\varepsilon)\|T^{-1/2}h_j\|^2_{\mathscr{H},\infty}\,\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)^{1/2}\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k)\Psi\|^2 + p_\varepsilon\|h_j\|^2_{\mathscr{H},\infty}\|\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k)\Psi\|^2.$$

右辺第 1 項は補題 13-16 によって，また，右辺第 2 項は再び，補題 13-12 によって評価すれば，題意の成立が証明される．□

定理 13-10 の証明　$\Psi \in D(H_0)$ とする．補題 13-17 によって，$\Psi \in D(H_2)$ であり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定数 $c(\varepsilon)$ があって，

$$\|H_2\Psi\| \le \left(2\sum_{j,k=1}^{J}|v_{jk}|\,\|T^{-1/2}h_j\|_{\mathscr{H},\infty}\|T^{-1/2}h_k\|_{\mathscr{H},\infty}+\varepsilon\right)\|d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)\Psi\| + c(\varepsilon)\|\Psi\|$$

と評価できる．また，補題 13-14 からは，

$$\|H_1\Psi\| \le \left(\sum_{j=1}^{J}a_j\|T^{-1/2}g_j\|_{\mathscr{H},\infty}+\frac{c_0}{2}+\varepsilon\right)\|\tilde{H}_0\Psi\|+d(\varepsilon)\|\Psi\|$$

という評価を得る．ただし，$d(\varepsilon)$ は ε に依存する定数である．したがって，

$$\|(H_1+H_2)\Psi\| \le (C+2\varepsilon)\|\tilde{H}_0\Psi\|+\{c(\varepsilon)+d(\varepsilon)\}\,\|\Psi\|.$$

条件 (13.18) によって，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば，$C + 2\varepsilon < 1$ とできる．ゆえに，$H = H_0 + H_1 + H_2$ に対して，加藤-Rellich の定理が適用できるので，題意の成立を見る．□

注意 13-2　$g_j \in L^{\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathscr{H})$ $(j = 1,\cdots,J)$ とする．各 B_j は有界で，$D(H_0)$ 上で $[B_j, \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)] = 0$ $(j = 1,\cdots,J)$ をみたすしよう．このとき，条件 (A.1), (A.2)

は，$a_j = 0$, $c_0 = 0$ としてみたされる．したがって，$v_{jk} = 0$ $(j, k = 1, \cdots, J)$ ならば，$C = 0$ であるから，(13.18) は自動的にみたされる．ゆえに，いまの条件のもとでは，H において $v_{jk} = 0$ $(j, k = 1, \cdots, J)$ として定義される作用素

$$H' := H_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\{B_j \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j) + \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j) B_j\right\}$$

は，$\|T^{-1/2} g_j\|_{\mathscr{H},\infty}$ $(j = 1, \cdots, J)$ に対する制限なしに，$D(H_0)$ 上で自己共役になる．定理 13-10 はこのような場合も陰に含んでいることに注意されたい．

次の問題は未解決である：(i) ハミルトニアン H の (本質的) 自己共役性を (13.18) よりもっと弱い条件のもとで証明すること，(ii) (13.18) が成り立たないときに，H が (本質的に) 自己共役にならないような例は存在するか[5)]．

13-3-2　スペクトル

ハミルトニアン H のスペクトルを調べるにあたって，これがどういう問題を提示するものであるかをまず見ておく．

一般に，ヒルベルト空間上の自己共役作用素 S について，S の孤立固有値で多重度が有限であるもの ― これを S の**離散固有値** (discrete eigenvalue) という ― の全体を $\sigma_{\mathrm{d}}(S)$ と記し，これを S の**離散スペクトル** (discrete spectrum) とよぶ．この集合の ($\mathbb{R}$ における) 補集合

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S) := \mathbb{R} \setminus \sigma_{\mathrm{d}}(S)$$

を S の**本質的スペクトル** (essential spectrum) あるいは**真性スペクトル**という．

簡単のため，A, T のスペクトルが次の形 ― 応用上，典型的に現れる形 ― をもつ場合を例にとって説明する：

$$\sigma_{\mathrm{d}}(A) = \{E_n(A)\}_{n=0}^{K}, \quad \sigma_{\mathrm{ess}}(A) := [\Sigma, \infty),$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \varnothing, \quad \sigma(T) = [\mu, \infty),$$

ここで，K は有限または可算無限，

$$E_0(A) < E_1(A) < \cdots < E_n(A) < E_{n+1}(A) < \cdots,$$

$E_n(A) < \Sigma$ $(n = 1, \cdots K)$ であり，$\mu \geq 0$,

[5)] 量子物理学に現れるハミルトニアンの自己共役性を証明する問題は，物理学者の興味をあまりひかないようであるが,「物理量は自己共役作用素によって表される」という，量子力学の公理に真に忠実であるならば，それは根本的に重要な問題の 1 つであると理解されるはずである．

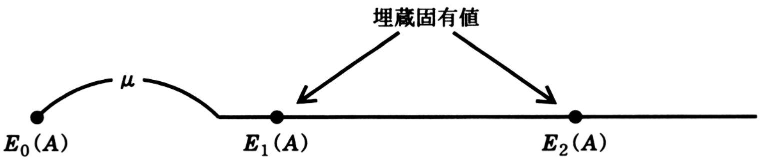


図 13-1 H_0 のスペクトル

$$\Sigma - E_0(A) > \mu$$

とする．定理 4-14 により，

$$\sigma_{\rm ess}(d\Gamma_{\rm b}(T)) = [\mu, \infty), \quad \sigma_{\rm p}(d\Gamma_{\rm b}(T)) = \{0\}.$$

したがって，自己共役作用素のテンソル積のスペクトルに関する定理 (定理 2-29，定理 2-31) により[6]，

$$\sigma(H_0) = \{E_n(A)\}_{n=0}^K \cup [E_0(A) + \mu, \infty),$$

$$\sigma_{\rm p}(H_0) = \{E_n(A)\}_{n=0}^K.$$

これから，H_0 は固有値として $E_n(A)$ $(n = 0, 1, \cdots K)$ をもち，その多重度は A の固有値としての $E_n(A)$ のそれに等しい．しかし，次の点に注意しよう．$E_n(A) \geq E_0(A) + \mu$ をみたす固有値 $E_n(A)$ は H_0 の連続スペクトルの中に "埋め込まれている"，ということである (図 13-1 参照)．このような固有値を**埋蔵固有値** (embedded eigenvalue) とよぶ．特に $\mu = 0$ の場合 (ボソンの質量が 0 の場合)，H_0 のすべての固有値 $E_n(A)$ は埋蔵固有値である．

ハミルトニアン H のスペクトル解析というのは，線形作用素の摂動論の観点からは，H_0 のスペクトルが摂動

$$H_I := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^J \left\{B_j \Phi_{\rm S}^{\oplus}(g_j) + \Phi_{\rm S}^{\oplus}(g_j) B_j\right\} + \sum_{j,k=1}^J v_{jk} \Phi_{\rm S}^{\oplus}(h_j) \Phi_{\rm S}^{\oplus}(h_k)$$

のもとでどのように変化するかを調べる問題と見ることができる．この問題においては，H の基底状態の存在と H_0 の埋蔵固有値が摂動のもとでどのように変化するかを

---

[6] H_0 は $A \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\rm b}(T)$ にユニタリ同値．

解析することが基本的に重要である．というのは，基底状態の存在は考察下の量子系の物理的安定性 (系全体の "崩壊" は生じないということ) を保証するものであり，埋蔵固有値の摂動問題は，原子からの**光の自発放射** — 励起状態にある原子が，原子の外に光子がなくても，一定の時間がたつとある確率で光を出して，エネルギーのより低い状態におちる現象 — と結びついているからである．後者は，発見法的には，量子場との相互作用を取り入れて初めて説明されるものである．自発放射を行うような励起状態は**準安定状態**とよばれる．光の自発放射が，粒子 (原子) と量子場の相互作用モデルを用いて理論的に説明されるべきであるならば，無摂動ハミルトニアンの最低固有値以外の埋蔵固有値は，摂動のもとで消えるべきであること，すなわち，相互作用をいれた全ハミルトニアンは埋蔵固有値の近くには固有値をもたないことが予想される．なぜなら，量子力学にあっては，ハミルトニアンの基底状態以外の固有状態は，物理的には，安定した励起状態を表し，外からの相互作用が加わらない限り，この状態にある系は決して，エネルギーのより低い状態に遷移することはないからである．では，そのような埋蔵固有値は摂動のもとでどうなるのかというと，**共鳴極** (resonance pole) とよばれるものに変容するのである．この共鳴極という概念は，作用素論的におおまかに説明すれば次のようになる．

T を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とし，ベクトル $\Psi \in \mathscr{H}$ に対して，T のレゾルヴェント集合 $\varrho(T)$ 上の関数 $f(z) := \langle \Psi, (T-z)^{-1}\Psi \rangle$ を考える．この関数が $\mathrm{Im}\, z > 0$ の領域から，実軸を横切って下半平面 ($\mathrm{Im}\, z < 0$)(第 2 面) の領域へと解析接続され，そこにおいて (実軸の近くに) 極をもつならば，この極を T の共鳴極という．

各共鳴極は，1 つの準安定状態に対応する．一方，準安定状態のエネルギー準位は厳密な線スペクトルではなく幅 (準位幅という) をもつ．準位幅は，単位時間あたりの，光の自然放射の確率に比例する．共鳴極の実部は対応する準安定状態のエネルギー準位の中心値，虚部の絶対値は準位幅と解釈されるものである．こうして，埋蔵固有値の摂動問題を厳密に研究することの重要性が理解される[7]．

ところで，一般に，作用素 H_0 に限らず，無摂動ハミルトニアンの埋蔵固有値が摂動のもとで共鳴極に変容するか否かは，かなり微妙な問題である．というのは，ハミルト

---

[7] 物理的な概念としての共鳴極は散乱現象に由来している．原子による電子の散乱や原子核による核子の散乱あるいは素粒子どうしの散乱において，散乱断面積が極端に大きくなるような散乱は**共鳴散乱**とよばれる．共鳴散乱が存在する場合，これに対応して，散乱行列 (S 行列) は複素エネルギー面上の第 2 面に極をもつことが発見法的に示される．この極を散乱現象における共鳴極という．個々の量子系において，数学的な意味での共鳴極と散乱現象における共鳴極とは一致することが予想されるが，これを証明するのはそれほど簡単ではない．シュレーディンガー作用素に関する，この問題の解析については，Reed and Simon (1978) の §XI.8 が参考になる．

ニアンに含まれるパラメータ (質量，結合定数等) の依存関係により，摂動のもとでの，埋蔵固有値の振る舞い方が質的に異なる様相を示しうるからである[8)]．埋蔵固有値が摂動のもとでつねに共鳴極に変容するとは限らないのである．この点について更に詳しいことは，Arai (1989a) を参照されたい．

ところで，近年，H の型の作用素について，埋蔵固有値の問題を攻略する方法が開発されてきた (Okamoto and Yajima (1985), Bach, Fröhlich and Sigal (1995, 1998a, 1998b, 1999), Jakvsić and Pillet (1995, 1996), Bach, Fröhlich, Sigal and Soffer (1999))．これは量子場の数理物理学の歴史における大きな進歩の 1 つと評価されるものである．しかし，本書では，残念ながら，この話題について解説する余裕がない．ここでは，H の固有値問題に関しては，予備的考察として，線形作用素に関する，**解析的摂動論** (analytic perturbation theory) とよばれる方法の範囲でわかる事柄だけを論じておく．

λ を複素パラメータとし，

$$H(\lambda) := H_0 + \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{J}\left\{B_j \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j) + \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(g_j)B_j\right\} + \lambda^2 \sum_{j,k=1}^{J} v_{jk}\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_j)\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(h_k)$$

$$= H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 \qquad (13.34)$$

を考える．λ が実数の場合，$H(\lambda)$ はハミルトニアン H において，g_j, h_j をそれぞれ，$\lambda g_j, \lambda h_j$ で置き換えて得られる作用素であり，$H(1) = H$ である．

前項の結果から，仮定 (A) と (13.17) のもとで，

$$C_1 := \sum_{j=1}^{J} a_j \|T^{-1/2} g_j\|_{\mathscr{H},\infty} + \frac{C_0}{2},$$

$$C_2 := 2\sum_{j,k=1}^{J} |v_{jk}| \|T^{-1/2} h_j\|_{\mathscr{H},\infty} \|T^{-1/2} h_k\|_{\mathscr{H},\infty}$$

とし，

$$C(\lambda) := |\lambda| C_1 + |\lambda|^2 C_2$$

とおけば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|(\lambda H_1 + \lambda^2 H_2)\Psi\| \le (C(\lambda) + \varepsilon)\|H_0 \Psi\| + d(\lambda, \varepsilon)\|\Psi\|, \quad \Psi \in D(H_0), \quad (13.35)$$

という評価が成立する．ここで，$d(\lambda, \varepsilon)$ は定数である (Ψ に依らない)．定理 13-10 と

[8)] 実は，上述の発見法的議論は，量子場と原子系の結合の強さが “比較的小さい” 場合にのみ有効とされるものである．

同様に,

$$C(\lambda) < 1$$

をみたす，すべての実数 λ に対して，$D(H(\lambda)) = D(H_0)$ であり，$H(\lambda)$ は自己共役で下に有界である.

$(C_1, C_2) \neq 0$ のとき，$|\lambda|$ に関する方程式 $C(\lambda) = 1$ の正の解を r_0 とする：

$$r_0 := \begin{cases} \dfrac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 + 4C_2}}{2C_2} & (C_2 \neq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{C_1} & (C_1 \neq 0, C_2 = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$r > 0$ に対して,

$$D_r := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < r\} \tag{13.36}$$

とおく.

定理 13-18　(A) と (13.17) を仮定し，$\mu > 0$, $(C_1, C_2) \neq 0$ とする．E を A の離散固有値で，$E < E_0(A) + \mu$ をみたすものとし，その多重度を m とする．このとき，定数 $\delta \in (0, r_0)$ と次の性質をみたす，D_δ 上の一価解析関数 $E^{(1)}(\lambda), \cdots, E^{(m)}(\lambda)$ が存在する：(i) $E^{(k)}(0) = E$ $(k = 1, \cdots, m)$，(ii) すべての $\lambda \in D_\delta$ に対して，$E^{(k)}(\lambda)$ $(k = 1, \cdots, m)$ は $H(\lambda)$ の (重複を含めた) 離散固有値である．さらに，E の近くにある，$H(\lambda)$ の離散固有値はこれらの固有値でつくされる.

証明　概略だけを述べる．(13.35) によって，作用素の族 $\{H(\lambda)\}_{\lambda \in D_{r_0}}$ は (A) 型の解析族であることが示される[9]．したがって，それは加藤の意味での解析族である[10]．したがって，Reed and Simon (1978) の Theorem XII.13 (p. 22) を応用することにより，求める結果を得る．□

注意 13-3　(i) 定数 δ は，μ に依存し，$\mu \longrightarrow 0$ のとき，$\delta \longrightarrow 0$ となるようになっ

---

9) R を複素平面の連結領域とし，$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，$T(\lambda)$ $(\lambda \in R)$ を空でないレゾルヴェント集合をもつ，$\mathscr{K}$ 上の閉作用素とする．作用素の集合 $\{T(\lambda)\}_{\lambda \in R}$ は次の 2 つの条件をみたすとき，**(A) 型の解析族** (analytic family of type (A)) とよばれる：(i) $\mathscr{K}$ の部分空間 $\mathscr{D}$ があって，すべての $\lambda \in R$ に対して，$D(T(\lambda)) = \mathscr{D}$，(ii) 各 $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して，R 上のベクトル値関数 $T(\lambda)\Psi$ は λ のベクトル値解析関数である．Reed and Simon (1978) の pp. 16～17 を参照.

10) R を複素平面の連結領域とし，$\mathscr{K}$ をヒルベルト空間，$T(\lambda)$ $(\lambda \in R)$ を空でないレゾルヴェント集合をもつ，$\mathscr{K}$ 上の閉作用素とする．作用素の集合 $\{T(\lambda)\}_{\lambda \in R}$ は次の性質をもつとき，**解析族**または**加藤の意味における解析族**とよばれる：各 $\lambda_0 \in R$ に対して，$z_0 \in \varrho(T(\lambda_0))$ があって，λ_0 の十分近くにあるすべての λ に対して，$z_0 \in \varrho(T(\lambda))$ であり，$(T(\lambda) - z_0)^{-1}$ は，z_0 の近くおいて，λ の作用素値解析関数である．Reed and Simon (1978), pp. 14～15 を参照.

ている．したがって，上の証明方法は，$\mu = 0$ の場合には適用できない．

(ii) 上の証明で使われた事実は解析的摂動論における基本的定理である (解析的摂動論については，Reed and Simon (1978) の 12 章，Kato (1976) の 7 章を参照)．解析的摂動論は，物理で行われる形式的摂動法に対して，一定の範囲内において，数学的に厳密な基礎づけをあたえるものである．

定理 13-18 を $E = E_0(A)$ の場合に応用すれば，$H(\lambda)$ の基底状態の存在に関する次の結果を得る．

系 13-19 (A) と (13.17) を仮定し，$\mu > 0, (C_1, C_2) \neq 0$ とする．A の基底状態エネルギー $E_0(A)$ は A の離散固有値で，その多重度は 1 であるとするこのとき，定数 $\delta \in (0, r_0)$ が存在して，すべての $\lambda \in D_\delta$ に対して，$H(\lambda)$ はただ 1 つの基底状態をもつ．基底状態エネルギー $E_0(H(\lambda))$ は D_δ 上の一価解析関数である．さらに，$E_0(A)$ の近くにある，$H(\lambda)$ の離散固有値は $E_0(H(\lambda))$ だけである．

定理 13-10 の仮定と付加的な仮定のもとで，H の本質的スペクトルについて次の型の事実を証明することができる：

(i) $\left\{E_0(H) + E \,|\, E \in \overline{\sigma_{\rm ess}(T) \setminus \{0\}}\right\} \subset \sigma_{\rm ess}(H)$.

(ii) $\sigma(T) = [0, \infty)$ ならば，$\sigma(H) = [E_0(H), \infty)$.

詳細については，Arai (1999a) を参照．

13-4 節 Nelson モデル

12 章で議論した具象的 van Hove モデルは，固定した核子と量子スカラー場 (中間子場) の相互作用を記述するものであった．核子が動けるとした場合のモデルも当然考えられるべきである．この節の目的はそのようなモデルの 1 つを定義し，いくつかの基本的性質を叙述することである．

13-4-1 ハミルトニアンの定義と基本的性質

質量 $M > 0$ の核子が d 次元空間 $\mathbb{R}^d$ の中に N 個存在する系を考える．この系のハミルトニアン $H_{\rm nucl}$ は，(13.1) の $H_{\rm p}$ において，$m_j = M$ $(j = 1, \cdots, N)$ としたものであたえられるとする：

$$H_{\rm nucl} := -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2M} \Delta_{\boldsymbol{x}_j} + V. \tag{13.37}$$

以下，次を仮定する：

(N)　H_{nucl} は自己共役で下に有界である．

核子は，$\mathbb{R}^d$ 上の量子スカラー場と相互作用するとし，相互作用系の状態のヒルベルト空間として，(13.2) で $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ の場合のヒルベルト空間

$$\mathscr{F}_N(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})) = L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathscr{F}_{\text{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})) = \int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} \mathscr{F}_{\text{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))\,dx \tag{13.38}$$

をとる．

$g_j \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ $(j = 1, \cdots, N)$ とし，写像 $[g_j] : \mathbb{R}^{dN} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ を

$$[g_j](x)(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} g_j(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}, \quad x = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{R}^{dN},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{13.39}$$

によって定義する ($[g_j](x)(\boldsymbol{k})$ は $[g_j](x) \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ の，点 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d$ における値を表す)．

補題 13-20　各 $[g_j]$ $(j = 1, \cdots, N)$ は強連続である．

証明　任意の $y = (\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_N) \in \mathbb{R}^{dN}$ に対して，

$$\| [g_j](x+y) - [g_j](x) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g_j(\boldsymbol{k})(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}_j} - 1)|^2\, d\boldsymbol{k}.$$

$|g_j(\boldsymbol{k})(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}_j} - 1)|^2 \le 4|g_j(\boldsymbol{k})|^2$ であり，$\lim_{\boldsymbol{y}_j \to 0} |g_j(\boldsymbol{k})(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}_j} - 1)|^2 = 0$ であるから，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{\boldsymbol{y}_j \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |g_j(\boldsymbol{k})(e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{y}_j} - 1)|^2\, d\boldsymbol{k} = 0$．したがって，題意がしたがう．□

補題 13-20 と命題 13-8 により，$\varPhi_{\text{S}}^{\oplus}([g_j])$ が定義される (ここでの $\varPhi_{\text{S}}(\cdot)$ は，$\mathscr{F}_{\text{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ 上の Segal の場の作用素)．そこで，$\boldsymbol{g} := (g_1, \cdots, g_N)$ として，全系のハミルトニアンを

$$H(\boldsymbol{g}) := H_{\text{nucl}} + d\varGamma_{\text{b}}(\omega) + \alpha \sum_{j=1}^{N} \varPhi_{\text{S}}^{\oplus}([g_j]) \tag{13.40}$$

によって定義する．ただし，α は実数パラメータ (粒子と場の相互作用の強さを測る結合定数)，ω は (0.31) であたえられる関数である (自由な量子スカラー場に付随するボソン 1 個のエネルギー関数)．

注意 13-4　9 章の記号を使えば，$\hat{D}_{\mathscr{S}} \times \hat{D}_{\mathscr{S}}$ 上の準双線形形式として，

$$\varPhi_{\text{S}}^{\oplus}([g_j]) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^d}} \left\{ a(\boldsymbol{k})^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j} g_j(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j} g_j(\boldsymbol{k})^* \right\} d\boldsymbol{k} \tag{13.41}$$

である．

定理 13-21 $g_j \in D(\omega^{-1/2})$ $(j=1,\cdots,N)$ とする．このとき，$D(H(\boldsymbol{g})) = D(H_{\rm nucl}) \cap D(d\Gamma_{\rm b}(\omega))$ であり，$H(\boldsymbol{g})$ は下に有界な自己共役作用素である．さらに，$H(\boldsymbol{g})$ は $H_{\rm nucl} + d\Gamma_{\rm b}(\omega)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である．

証明 $H(\boldsymbol{g})$ は，13-3 節で論じた作用素 H において，$A = H_{\rm nucl}, T = \omega, J = N, B_j = 1, h_j = 0$ $(j,k=1,\cdots,J)$ とした場合に他ならない．したがって，条件 (A.1) は $a_j = 0$ としてみたされる．また，(A.2) は $c_0 = d_0 = 0$ として成立する．$g_j \in D(\omega^{-1/2})$ により，$[g_j] \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN}; L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ $(T=\omega$ の場合)．したがって，定理 13-10 の仮定はすべてみたされる．ゆえに，題意がしたがう． □

作用素 $H(\boldsymbol{g})$ をハミルトニアンとし，時刻 0 の場を $\phi_0(f), \pi_0(f)$ ((12.8), (12.9) を参照) とする量子場のモデルを **Nelson (ネルソン) モデル**とよぶ．

注意 13-5 シュレーディンガー作用素の自己共役性については，すでに多くの研究がある．たとえば，Reed and Simon (1975) の 10 章や Cycon 他 (1987) の 1 章を参照．

次に $H(\boldsymbol{g})$ のスペクトルの下限，すなわち，基底状態エネルギーを下から評価する．関数

$$U_{\boldsymbol{g}}(x) := -\frac{\alpha^2}{2(2\pi)^d}\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g_i(\boldsymbol{k})^* g_j(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)}}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k} \tag{13.42}$$

を導入し，

$$H_{\rm nucl}(\boldsymbol{g}) := H_{\rm nucl} + U_{\boldsymbol{g}} \tag{13.43}$$

とする．

補題 13-22 $D(H_{\rm nucl}(\boldsymbol{g})) = D(H_{\rm nucl})$ であり，$H_{\rm nucl}(\boldsymbol{g})$ は下に有界な自己共役作用素である．さらに，$H_{\rm nucl}(\boldsymbol{g})$ は $H_{\rm nucl}$ の任意の芯上で本質的に自己共役である．

証明 容易にわかるように，$U_{\boldsymbol{g}}$ は有界な実数値関数である．実際，

$$|U_{\boldsymbol{g}}(x)| \le \frac{\alpha^2}{2(2\pi)^d}\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g_i(\boldsymbol{k})||g_j(\boldsymbol{k})|}{\omega(\boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k} < \infty.$$

したがって，加藤-Rellich の定理 (注意 12-1 (ii) を参照) によって題意がしたがう． □

注意 13-6　関数 $U_{\boldsymbol{g}}$ は

$$U_{\boldsymbol{g}}(x) = -\frac{\alpha^2}{2(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}\sum_{j=1}^N g_j(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}\right|^2 d\boldsymbol{k} \tag{13.44}$$

と書けるので,

$$U_{\boldsymbol{g}}(x) \le 0, \quad x \in \mathbb{R}^{dN}, \tag{13.45}$$

である.

定理 13-23　$g_j \in D(\omega^{-1/2})$ $(j=1,\cdots,N)$ とする. このとき,

$$E_0(H_{\mathrm{nucl}}(\boldsymbol{g})) \le E_0(H(\boldsymbol{g})) \le E_0(H_{\mathrm{nucl}}). \tag{13.46}$$

証明　任意の $\Psi \in D(H_{\mathrm{nucl}}) \cap D(d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega))$ に対して,

$$\langle \Psi, H(\boldsymbol{g})\Psi\rangle = \langle \Psi, H_{\mathrm{nucl}}\Psi\rangle + \int_{\mathbb{R}^{dN}} \langle \Psi(x), H_{\mathrm{VH}}(x)\Psi(x)\rangle_{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))}\,dx.$$

ただし,

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{VH}}(x) &:= d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \alpha\sum_{j=1}^N \Phi_{\mathrm{S}}([g_j](x)) \\ &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \Phi_{\mathrm{S}}\left(\alpha\sum_{j=1}^N [g_j](x)\right). \end{aligned}$$

これは van Hove モデルのハミルトニアンの形をしている. したがって, 定理 12-7 から,

$$E_0(H_{\mathrm{VH}}(x)) = -\frac{\alpha^2}{2}\left\|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{j=1}^N [g_j](x)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})} = U_{\boldsymbol{g}}(x).$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \langle \Psi, H(\boldsymbol{g})\Psi\rangle &\ge \langle \Psi, H_{\mathrm{nucl}}\Psi\rangle + \langle \Psi, U_{\boldsymbol{g}}\Psi\rangle = \langle \Psi, H_{\mathrm{nucl}}(\boldsymbol{g})\Psi\rangle \\ &\ge E_0(H_{\mathrm{nucl}}(\boldsymbol{g}))\|\Psi\|^2. \end{aligned}$$

これは (13.46) の第 1 番目の不等式 ($E_0(H(\boldsymbol{g}))$ に対する下界の評価) を意味する[11].

(13.46) の第 2 番目の不等式を示すために, 任意の $u \in D(H_{\mathrm{nucl}})$ に対して,

$$\left\langle u \times \Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}, H(\boldsymbol{g})u \times \Omega_{L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})}\right\rangle = \langle u, H_{\mathrm{nucl}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{dN})}$$

---

[11]「任意の下に有界な自己共役作用素 S に対して, $\langle \psi, S\psi\rangle \ge E_0(S)\|\psi\|^2$ $(\psi \in D(S))$」(**変分原理**) を使っている.

に注意する．変分原理により，左辺は $E_0(H(\boldsymbol{g}))\|u\|^2$ 以上である．したがって，

$$E_0(H(\boldsymbol{g}))\|u\|^2 \le \langle u, H_{\mathrm{nucl}} u\rangle$$

したがって，

$$E_0(H(\boldsymbol{g})) \le \inf_{u \in D(H_{\mathrm{nucl}}), \|u\|=1} \langle u, H_{\mathrm{nucl}} u\rangle.$$

変分原理により，右辺は $E_0(H_{\mathrm{nucl}})$ に等しい．ゆえに，(13.46) の第 2 番目の不等式が得られる． □

(13.46) の第 2 番目の不等式から，粒子系と量子場との相互作用は粒子系の基底状態エネルギーを高くしないことがわかる．他方，(13.46) の第 1 番目の不等式は，基底状態の下がり方に対する下からの評価をあたえる．これを統制するのが，関数 $V + U_{\boldsymbol{g}}$ をポテンシャルとする粒子系のハミルトニアンの基底状態エネルギーであるというのは興味深い．詳細は省略するが，関数 $U_{\boldsymbol{g}}$ は粒子と量子場の相互作用が引き起こす，ある種の**実効的 (effective) なポテンシャル**と解釈されるものである．すなわち，粒子と量子場との相互作用の効果は，おおまかに言って，ある種の極限的状況 (近似) で，粒子に対するもともとのポテンシャル V が新しいポテンシャル $V + U_{\boldsymbol{g}}$ へと変化する形でとらえられる[12]．

13-4-2　運動量切断の除去

この項では，$m > 0$ の場合 (ボソンが質量をもつ場合) のみを考える．

任意の $\kappa > 0$ に対して，

$$g_j^{(\kappa)}(\boldsymbol{k}) = \frac{\chi_{[0,\kappa]}(|\boldsymbol{k}|)}{\sqrt{\omega(\boldsymbol{k})}}, \quad j = 1, \cdots, N, \tag{13.47}$$

とする．したがって，

$$[g_j^{(\kappa)}](x)(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} g_j^{(\kappa)}(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^{dN}. \tag{13.48}$$

g_j を $g_j^{(\kappa)}$ で置き換えて得られるハミルトニアン $H(\boldsymbol{g})$ を H_κ と記す：

$$H_\kappa := H_{\mathrm{nucl}} + d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \alpha \sum_{j=1}^N \Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}([g_j^{(\kappa)}]). \tag{13.49}$$

パラメータ κ は運動量の紫外切断を表す．この項では，H_κ に関して，運動量切断除去

---

[12] 具象的 van Hove モデルの場合 (12-11-4 項) と比較せよ．実効ポテンシャルは，厳密な形では，もともとのハミルトニアン $H(\boldsymbol{g})$ のある種の**スケーリング極限**として導出することができる．Davies (1979), Hiroshima (1998a, 1999a) を参照．

の極限 $\kappa \longrightarrow \infty$ が何らかの意味で存在するかどうかを考察する．

$\kappa = \infty$ に対するベクトル値関数 $[g_j^{(\infty)}]$ は，任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して，$L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ に入らない．したがって，H_κ は $\kappa = \infty$ に対しては定義できない．そこで，H_κ から適当な発散量を引き去ることによって，これを $\kappa \longrightarrow \infty$ の極限において収束させることを考えるのは自然である[13]．

κ の関数

$$E_\kappa := -\frac{M\alpha^2}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\chi_{[0,\kappa]}(|\boldsymbol{k}|)}{2M\omega(\boldsymbol{k})^2 + \omega(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}^2}\,d\boldsymbol{k} \tag{13.50}$$

は，$d \geq 3$ ならば，$\kappa \longrightarrow \infty$ のとき発散する．これを H_κ から引き去る発散量とすればよいことが次の定理によって示される．

定理 13-24　$d = 3$ とする．このとき，任意の $t \in \mathbb{R}$ と $\Psi \in \mathscr{F}_N(L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ に対して，

$$\lim_{\kappa\to\infty} e^{-it(H_\kappa - NE_\kappa)}\Psi = e^{-it\hat{H}}\Psi$$

をみたす自己共役作用素 $\hat{H}$ がただ 1 つ存在する．$\hat{H}$ は下に有界である．

この定理は Nelson (1964) によるものであり，次に述べる意味において，構成的場の量子論における画期的な結果の 1 つである[14]．

一般に運動量切断の入ったハミルトニアンから，運動量切断なしの極限で発散する作用素を引き去ってできる作用素に関して，運動量切断を除く極限操作は，場の量子論に特有の発散の困難を回避する処方 — くりこみ (renormalization) — の 1 つに対応する．そのような極限で定義される理論が存在するとき，これを**くりこまれた理論** (renormalized theory) とよぶ．物理学の文献では，通常，形式的摂動論の範疇において，摂動級数の各次数ごとに発散のくりこみが考察される．くりこまれた理論をつくるためのこのような方法は**摂動的** (perturbative) よばれる．

発見法的あるいは慣習的な見方によれば，運動量切断のない理論は，運動量切断の理論が定義されているヒルベルト空間の中においては構成されない，とされる．上述の Nelson の結果は，この見方を覆すものであり，しかもこれが，関数解析的・作用素論

---

[13] 類似の考え方はすでに発散級数論に見られる．たとえば，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ は発散しているが，$\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N} 1/n - \log N\right\}$ は収束する．ちなみに，この極限値は**オイラー (Euler) の定数**とよばれ，ふつう γ で表される．

[14] Nelson のもともとの結果は，$V = 0$ の場合に関するものであるが，その証明を見ると，$V \neq 0$ の場合にも成立することがただちにわかる．

的手法に基づく**非摂動的方法** (non-perturbative method) によって可能になったということである．

定理 13-24 の自己共役作用素 $\hat{H}$ は，Nelson モデルに関する，**運動量切断なしのくりこまれたハミルトニアン**とよばれる．他方，$\hat{H}_\kappa := H_\kappa - NE_\kappa$ は，**運動量切断 κ をもつくりこまれたハミルトニアン**とよばれる．詳細は割愛するが，$\hat{H}_\kappa$ を定義するために使われたスカラー量 NE_κ は，形式的摂動論の観点からは，$V = 0$ の場合の H_κ の基底状態エネルギーを α で形式的ベキ級数に展開したときの 2 次の量である．したがって，Nelson モデルにおいては，エネルギーのくりこみを行うことにより，運動量切断のない，くりこまれた理論が構成される．

定理 13-24 の証明は原論文 (Nelson (1964)) に譲る．$V = 0$ の場合の Nelson モデルのくりこみの問題に関する他の研究として，Cannon (1971), Fröhlich (1973, 1974) がある．後者はボソンの質量 m が 0 の場合を詳しく論じている．

注意 13-7　$d = 1, 2$ の場合も定理 13-24 は成立する (これは $d = 3$ の場合の証明から容易にわかる)．$d \geq 4$ の場合は，物理的でないとされるせいか，運動量切断なしの理論を構成する研究はなされていないようである．理論の次元依存性を考察する観点からは，$d \geq 4$ の場合も興味があるはずである．しかし，$d \geq 4$ の場合には，発散の度合いが $d = 3$ の場合に比べて悪くなるので，数学的解析はいっそう困難になる．

13-4-3　基底状態の存在

$V \neq 0$ のとき，H_{nucl} は基底状態をもちうる[15)]．いま，H_{nucl} が一意的に基底状態をもつとしよう．このとき，次の問題が基本的である．

(i)　$H(g)$ は基底状態をもつか．

(ii)　$H(g)$ が基底状態をもつとき，それは一意か．

これらの問題は，$m > 0$ の場合と $m = 0$ の場合では様相が異なる．$m > 0$ で $|\alpha|$ が (m に依存しながら) 小さい場合には，系 13-19 が応用でき，肯定的な解が得られる．しかし，$m > 0$ であっても，任意の α に対して，基底状態の存在を示すのは難しい．この場合には，本質的に非摂動的方法が必要とされるからである．$m = 0$ の場合はさらに難しくなる．問題 (i), (ii) に関する基本的な (部分的) 結果は，Spohn (1998), Bach, Fröhlich and Sigal (1995, 1998a, 1998b, 1999) によって得られている．

最近，Ammari (2000) によって，くりこまれたハミルトニアン $\hat{H}$ に対するスペク

---

15) たとえば，Reed and Simon (1978) の §XIII.12 を参照．

トル理論 (基底状態の存在を含む) と散乱理論が構成された.

13-5 節　非相対論的量子電磁力学 — Pauli-Fierz モデル

電子, 陽電子, 陽子のような荷電粒子と量子輻射場との相互作用に関わる現象を扱う場の量子論は**量子電磁力学** (quantum electrodynamics; 通常, QED と略す) とよばれる. この理論は, 私たちのまわりに広がる物質界の安定性と諸現象をミクロのレヴェルから解明するための基本的理論の 1 つとして重要な位置を占めるものである.

QED には主に 2 種類ある. 1 つは, 荷電粒子の生成・消滅が起こらないような非相対論的な領域に関わるもので (光子の生成・消滅はあってよい), **非相対論的 (nonrelativistic) QED** とよばれる. もう 1 つは荷電粒子の生成・消滅も起こり得るような完全に相対論的な場合に関わるものである. この場合を扱うのが本来の QED であって, 前者と区別する意味において**相対論的 (relativistic) QED** とよばれる. もちろん, 相対論的 QED の方がより根源的な理論である. 非相対論的 QED は, 形式的な図式では, 相対論的 QED から, 物質場に関して非相対論的な極限 — 光速 c をパラメータと見て, $c \longrightarrow \infty$ とする極限 — をとることによって得られるとされる.

物理における QED の研究の多くは, くりこみの処方を用いる形式的な摂動的方法によるものであるが, こうした研究により, QED が量子的電磁現象に関する諸々の実験結果を驚くべき精度で説明あるいは予言することが示されてきた[16). しかし, 物理的な成功とは対照的に, 4 次元時空における相対論的 QED を数学的に厳密に構成する問題はいまだに解かれていない. したがって, 当然のことながら, 実験結果と比較しうる厳密な定理や命題を導くこともできていない. かように 4 次元時空における相対論的 QED に関わる数学は挑戦的な難問を提示するのである. そこで, もう少し扱い易い非相対論的 QED を数学的に厳密な形で研究する方向へと向かうのは自然である. この節では, この方向の研究を概観する.

13-5-1　ハミルトニアン

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ において, 電荷 $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 質量 $m > 0$ の量子的荷電粒子が量子輻射場と相互作用をする量子系を考える. 荷電粒子の個数を N とする. この量子系のヒルベルト空間として,

$$\mathscr{F}(\mathscr{E}) = L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{E}) = L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{rad}} = \int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} \mathscr{F}_{\mathrm{rad}}\, dx \qquad (13.51)$$

---

16) たとえば, 木下 (1977) を参照.

がとれる．ここで，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{E}) = \mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ は量子輻射場のフォック空間である (10-2 節を参照)．

以下，特に断らない限り，10 章の記号をそのまま使う．

g を $\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}$ 上のボレル可測関数で $g, g/\omega_{\mathrm{ph}} \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$ をみたすものとし，$j = 1, \cdots, d$, $r = 1, \cdots, d-1$ に対して，写像 $g_j^{(r)} : \mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}})$

$$g_j^{(r)}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})}} e_j^{(r)}(\boldsymbol{k}) g(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{13.52}$$

を定義し，

$$A_j(\boldsymbol{x}; g) := \sum_{r=1}^{d-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^{(r)}(g_j^{(r)}(\boldsymbol{x}))^* + a^{(r)}(g_j^{(r)}(\boldsymbol{x})) \right\} \tag{13.53}$$

を導入する．生成・消滅作用素 $a^{(r)}(f)$ $(f \in L^2(\mathbb{R}^d_{\boldsymbol{k}}))$ の核 $a^{(r)}(\boldsymbol{k})$ を用いて表せば，準双線形形式の意味で

$$A_j(\boldsymbol{x}; g) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^d \omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})}} e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})$$

$$\times \left\{ a^{(r)}(\boldsymbol{k})^* g(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + a^{(r)}(\boldsymbol{k}) g(\boldsymbol{k})^* e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right\} d\boldsymbol{k} \tag{13.54}$$

である[17)]．関数 g は，物理的には，光子の運動量切断を表す．

各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ ごとに，$A_j(\boldsymbol{x}; g)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の本質的に自己共役な作用素である．その閉包も同じ記号で表す．すると，これから，$j = 1, \cdots, d$, $n = 1, \cdots, N$ に対して，$\mathscr{F}(\mathscr{E})$ 上の自己共役な分解可能作用素

$$A_j^{\oplus}(g)_n := \int_{\mathbb{R}^{dN}_{\boldsymbol{x}}}^{\oplus} A_j(\boldsymbol{x}_n; g)\, dx \tag{13.55}$$

が定義される．これらの作用素の組を $\boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n$ と記す：

$$\boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n := \left(A_1^{\oplus}(g)_n, \cdots, A_d^{\oplus}(g)_n \right). \tag{13.56}$$

$n = 1, \cdots, N$ に対して，$\boldsymbol{x}_n = (x_{n1}, \cdots, x_{nd}) \in \mathbb{R}^d$ と表すとき，変数 x_{nj} に関する一般化された偏微分作用素を D_{nj} と記し，$L^2(\mathbb{R}^{dN}_{\boldsymbol{x}})$ で働く作用素と考える．作用素の組

$$\boldsymbol{p}_n := (-iD_{nj}, \cdots, -iD_{nd}) \tag{13.57}$$

を導入する．これは，物理的には，n 番目の荷電粒子の (相互作用がない場合の) 運動量作用素を表す．ヒルベルト空間 $\mathscr{F}(\mathscr{E})$ で働く次の作用素を考える．

[17)] $c = 1, \hbar = 1$ の単位系を用いている．

$$H_{\mathrm{PF}} := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{p}_n - q\boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n\right)^2 + V + H_{\mathrm{rad}}. \tag{13.58}$$

これをハミルトニアンとする，荷電粒子と量子輻射場の相互作用モデルは **Pauli-Fierz (パウリ-フィールツ) モデル**とよばれる (Pauli and Fierz (1938)).

注意 13-8　ハミルトニアン H_{PF} は，慣習的には，

$$H_{\mathrm{PF}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m} (\boldsymbol{p}_n - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n; g))^2 + V + H_{\mathrm{rad}}$$

と書かれる．

例 13-1　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の中の K 個の固定点 $\boldsymbol{R}_k$ $(k = 1, \cdots, K)$ に電荷 $Z_k e > 0$ (e は基本電荷) の原子核が静止して，そのまわりを N 個の電子が運動する系を考える．この場合，この系の電気力によるポテンシャルは

$$V_{K,N}(\boldsymbol{x}) = -\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N} \frac{Z_k e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{R}_k - \boldsymbol{x}_j|} + \sum_{l<n}^{N} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_n|} \tag{13.59}$$

($\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$ $(n = 1, \cdots, N)$) であたえられる (ε_0 は真空の誘電率)．(13.59) の右辺第 1 項は，原子核と電子のクーロン引力をあたえるポテンシャル，第 2 項は電子どうしのクーロン斥力をあたえるポテンシャルである．水素様原子 1 個がある場合は，原子核，電子ともに 1 個であるから，$N = 1$, $K = 1$ の場合であって，

$$V_{1,1}(\boldsymbol{x}) := -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

がそのポテンシャルである．H_{PF} において，$d = 3$, $q = -e$, $V = V_{K,N}$ の場合は物理的にもっとも重要な場合の 1 つである．

13-5-2　自己共役性

荷電粒子のみからなる系のハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{p}}(V) := \sum_{n=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_n^2}{2m} + V = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta_{\boldsymbol{x}_n}}{2m} + V \tag{13.60a}$$

である．便宜上，

$$H_{0\mathrm{p}} := H_{\mathrm{p}}(0) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta_{\boldsymbol{x}_n}}{2m} \tag{13.60b}$$

とおく．$q = 0$ の場合の Pauli-Fierz ハミルトニアン H_{PF} を $H_{\mathrm{PF}}^{(0)}$ と記す：

$$H_{\mathrm{PF}}^{(0)} := H_{\mathrm{p}}(V) + H_{\mathrm{rad}}. \tag{13.61}$$

この作用素は，$H_{\mathrm{p}}(V) \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{rad}}$ とユニタリ同値である．したがって，$H_{\mathrm{p}}(V)$ が (本質的に) 自己共役ならば，$H_{\mathrm{PF}}^{(0)}$ は (本質的に) 自己共役である．また，容易にわかるように，$H_{\mathrm{p}}(V)$ が下に有界ならば，$H_{\mathrm{PF}}^{(0)}$ も下に有界であり，

$$H_{\mathrm{PF}}^{(0)} \geq E_0(H_{\mathrm{p}}(V)). \tag{13.62}$$

粒子ハミルトニアンについて次の仮定をおく：

仮定 (P)

(P.1)　$H_{\mathrm{p}}(V)$ は，下に有界な自己共役作用素である ($D(H_{\mathrm{p}}(V) = D(H_{0\mathrm{p}}) \cap D(V)$)．そこで，

$$\hat{H}_{\mathrm{p}}(V) := H_{\mathrm{p}}(V) - E_0(H_{\mathrm{p}}(V))$$

とおく (これは非負自己共役作用素)．

(P.2)　定数 $a, b \geq 0$ が存在して，すべての $\psi \in D(H_{\mathrm{p}}(V))$ に対して，

$$\|H_{0\mathrm{p}}^{1/2}\psi\|^2 \leq a^2\|\hat{H}_{\mathrm{p}}(V)^{1/2}\psi\|^2 + b^2\|\psi\|^2$$

が成り立つ．

各 $j = 1, \cdots, d$ に対して，

$$C_j(g) := \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(1 - \frac{k_j^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\frac{|g(\boldsymbol{k})|^2}{\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})^2}\,d\boldsymbol{k}}, \tag{13.63}$$

$$C(g) := \sum_{j=1}^{d} C_j(g), \tag{13.64}$$

とおく．

定理 13-25　(P) を仮定し，$g, g/\omega_{\mathrm{ph}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする． さらに，

$$\frac{a|q|NC(g)}{\sqrt{2m}} + \frac{q^2N}{m}\sum_{j=1}^{d} C_j(g)^2 < 1 \tag{13.65}$$

がみたされるとする．このとき，H_{PF} は $D(H_{\mathrm{PF}}^{(0)})$ 上で自己共役であり，下に有界である．さらに，H_{PF} は $H_{\mathrm{PF}}^{(0)}$ の任意の芯上で本質的に自己共役である．

証明　$D(H_{\mathrm{PF}}^{(0)})$ 上で

$$H_{\mathrm{PF}} = H_{\mathrm{PF}}^{(0)} - \sum_{n=1}^{N}\frac{q}{2m}\left\{\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n + \boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n \cdot \boldsymbol{p}_n\right\}$$

$$+\frac{q^2}{2m}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n\cdot\boldsymbol{A}^{\oplus}(g)_n$$

と書ける．$n=1,\cdots,N$, $j=1,\cdots,d$ に対して，

$$G_{nj}(x):=(g_j^{(1)}(\boldsymbol{x}_n),\cdots,g_j^{(d-1)}(\boldsymbol{x}_n))\in\mathscr{E},$$

とおくと，$G_{nj}\in L^{\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathscr{E})\cap L^{\infty}_{1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathscr{E})$ であり，

$$A_j^{\oplus}(g)_n=\Phi_{\mathrm{S}}^{\oplus}(G_{nj})$$

と書ける．ただし，ここでの $\Phi_{\mathrm{S}}(\cdot)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ 上の Segal の場の作用素である．したがって，H_{PF} は (13.15) で定義される H の形をしている．対応関係は次の通りである：

$$j\longleftrightarrow\{n,j\}\ (\text{二重添字}),\quad J\longleftrightarrow dN,$$

$$B_j\longleftrightarrow-\frac{q}{2m}p_{nj},\quad g_j,\,h_j\longleftrightarrow G_{nj},$$

$$v_{jk}\longleftrightarrow\frac{q^2}{2m}\delta_{jk}.$$

そこで，この対応の文脈において，定理 13-10 の仮定がみたされるかどうかを確かめる．まず，

$$\left\|\frac{q}{2m}p_{nj}\Psi\right\|^2=\left(\frac{q}{2m}\right)^2\langle\Psi,p_{nj}^2\Psi\rangle\le\left(\frac{q}{2m}\right)^2 2m\langle\Psi,H_{0\mathrm{p}}\Psi\rangle=\frac{q^2}{2m}\|H_{0\mathrm{p}}^{1/2}\Psi\|$$

$$\le\frac{q^2a^2}{2m}\|\hat{H}_{\mathrm{p}}(V)^{1/2}\Psi\|^2+\frac{q^2b^2}{2m}\|\Psi\|^2.$$

したがって，定理 13-10 の a_j に対応するのは $|q|a/\sqrt{2m}$ である．クーロンゲージのために，$D(H_{\mathrm{PF}}^{(0)})$ 上で

$$\sum_{j=1}^{d}[p_{nj},\Phi_{\mathrm{S}}(G_{nj})]=0$$

であることがわかる．これは，定理 13-10 の c_0 に対応するのが 0 であることを示す．容易にわかるように，

$$\|\omega^{-1/2}G_{nj}\|^2_{\mathscr{E},\infty}=\sum_{r=1}^{d-1}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e_j^{(r)}(\boldsymbol{k})^2|g(\boldsymbol{k})|^2}{\omega_{\mathrm{ph}}(\boldsymbol{k})^2}\,d\boldsymbol{k}=C_j(g)^2.$$

以上から，(13.65) が成立すれば，上記の対応において，定理 13-10 の仮定がみたされることがわかる．ゆえに結論を得る．□

注意 13-9　上の証明からわかるように，定理 13-25 においては，ω_{ph} の形は全然重要

でない．したがって，ω_{ph} を，他の非負値関数 ω で $g, g/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ をみたすものに置き換えても，定理 13-25 は，同じ仮定のもとで，成り立つ．

注意 13-10 定理 13-25 の型の定理は，$N = 1, d = 3$ の場合に，Okamoto and Yajima (1985) によって得られている．定理 13-25 にあっては，結合定数 q の大きさに対して制限がつくのが不満足な点である．この制限をはずす問題は数学的にも物理的にも重要である．この点について，若干のコメントをしておく．粒子と量子輻射場の相互作用において，量子輻射場の座標依存性をなくして定義されるハミルトニアン

$$H_{\mathrm{DP}} := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2m} (\boldsymbol{p}_n - q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}; g))^2 + V + H_{\mathrm{rad}} \tag{13.66}$$

を双極近似 (dipole approximation) の Pauli-Fierz ハミルトニアンという．このハミルトニアンについては，q に対する制限なしで ($H_{\mathrm{p}}(V)$ に対しては定理 13-25 と同様の条件のもとで)，その自己共役性を証明することができる (Arai (1981a, 1983a, 1983b))．

$|q|$ に対する制限なしの場合に，H_{PF} の本質的自己共役性を証明する問題に関して，最近，Hiroshima (1999b) によって重要な寄与がなされた．Hiroshima (1999c, 1999d, 2000) も参照．

13-5-3 反磁性的不等式

次に，H_{PF} のスペクトルの下限を評価する．

$\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}$ の有限粒子ベクトルの空間を $\mathscr{F}_{\mathrm{rad},0}$ とし，

$$D := \mathscr{L}\{u \times \psi \,|\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{dN}), \psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{rad},0} \cap D(H_{\mathrm{rad}})\} \tag{13.67}$$

とおく．これは，$\mathscr{F}(\mathscr{E})$ で稠密な部分空間である．容易にわかるように，$V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{dN})$ ならば，

$$D \subset D(H_{\mathrm{PF}}) \tag{13.68}$$

が成り立つ．

定理 13-26 **反磁性的不等式 (diamagnetic inequality)**．$g, g/\omega_{\mathrm{ph}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．また，$V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{dN})$ であり，$H_{\mathrm{p}}(V)$ は下に有界な自己共役作用素とする．このとき，

$$H_{\mathrm{PF}} \restriction D \geq E_0(H_{\mathrm{p}}(V)). \tag{13.69}$$

特に，H_{PF} が D 上で本質的に自己共役ならば，

$$E_0(\overline{H}_{\mathrm{PF}}) \geq E_0(H_{\mathrm{p}}(V)). \tag{13.70}$$

証明　$\Psi \in D$, $f(x) := \|\Psi(x)\|^2_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}}$ とすれば，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，作用素 $A_j(\boldsymbol{x}_n; g)$ の対称性を使えば，

$$\begin{aligned} D_{nj} f(x) &= \langle D_{nj}\Psi(x), \Psi(x)\rangle_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} + \langle \Psi(x), D_{nj}\Psi(x)\rangle_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} \\ &= \langle [D_{nj} - iqA_j(\boldsymbol{x}_n; g)]\Psi(x), \Psi(x)\rangle_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} \\ &\quad + \langle \Psi(x), [D_{nj} - iqA_j(\boldsymbol{x}_n; g)]\Psi(x)\rangle_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} \\ &= 2\mathrm{Re}\,\langle \Psi(x), [D_{nj} - iqA_j(\boldsymbol{x}_n; g)]\Psi(x)\rangle_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} \end{aligned}$$

と変形できる．他方，

$$D_{nj} f(x) = 2\|\Psi(x)\| D_{nj}\|\Psi(x)\| \tag{13.71}$$

が成り立つことを示すのはそれほど難しくない (問題 1 を参照)．したがって，

$$\begin{aligned} |\,\|\Psi(x)\| D_{nj}\|\Psi(x)\|\,| &= |\mathrm{Re}\,(\Psi(x), [D_{nj} - iqA_j(\boldsymbol{x}_n; g)]\Psi(x))_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}}| \\ &\leq \|\Psi(x)\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} \|[D_{nj} - iqA_j(\boldsymbol{x}_n; g)]\Psi(x)\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}}. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$|D_{nj}\|\Psi(x)\|\,| \leq \|\,[D_{nj} - iqA_j(\boldsymbol{x}_n; g)]\Psi(x)\,\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}}.$$

なお，$\|\Psi(x)\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}} = 0$ ならば，この不等式は自明である．両辺を 2 乗し，その両辺に $V(x)\|\Psi(x)\|^2_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}}$ を加えて，x について積分すれば，

$$\|\hat{H}_{\mathrm{p}}(V)^{1/2}\Phi\|^2 + E_0(H_{\mathrm{p}}(V))\|\Phi\|^2 \leq \langle \Psi, H_{\mathrm{PF}}\Psi\rangle$$

を得る．$\Phi(x) = \|\Psi(x)\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{rad}}}$．$\|\Phi\|^2 = \|\Psi\|^2$ であるから，

$$E_0(H_{\mathrm{p}}(V))\|\Psi\|^2 \leq \langle \Psi, H_{\mathrm{PF}}\Psi\rangle$$

がしたがう．ゆえに，求める不等式が得られる．　□

注意 13-11　(i) 定理 13-26 は，当該の仮定のもとで，Nelson モデルの場合とは対照的に，粒子と量子輻射場との相互作用は基底状態エネルギーをさげないことを示している．

外的なベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ を取り入れたシュレーディンガー作用素

$$H(\boldsymbol{a},V) := (2m)^{-1}\sum_{n=1}^{N}(p_n - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}_n))^2 + V$$

($L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上の作用素) についても，V, $\boldsymbol{a}$ に関する適当な条件のもとで，(13.70) に呼応する不等式

$$E_0(H(\boldsymbol{a},V)) \geq E_0(H(\boldsymbol{0},V)) \tag{13.72}$$

が成り立つ (Simon (1976), Simon (1979) の p.2 を参照).

ちなみに「反磁性的不等式」という呼称は次に述べる理由によると思われる：**反磁性** (diamagnetism) というのは，物質に磁場をかけたとき，磁場と逆向きに磁化が生じる場合の磁性のことをいう．反磁性の原因は電子の軌道運動にある．したがって，磁場をかけて反磁性が生じる場合には，外場と磁化の向きが逆なので，古典的には，系のエネルギーは下がらない．不等式 (13.70) および (13.72) は，この描像が量子力学的にも成立することを示しているわけである．

しかし，電子のスピンを考慮した場合には，スピン磁気モーメントが外的磁場と相互作用をするので，事情は異なってくる．実際，$L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ で働く，電子のスピンを入れたハミルトニアン

$$\tilde{H}(\boldsymbol{a},V) := H(\boldsymbol{a},V) + \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\sigma^j B_j$$

($N=1, d=3$ とし，$\boldsymbol{B} := \mathrm{rot}\, a = \nabla \times \boldsymbol{a}$ (磁場)，σ^j は Pauli 行列) について，$\boldsymbol{B}$ が定ベクトルの場合 (定数磁場)，(13.72) と逆向きの不等式 — **常磁性的不等式** (paramagnetic inequality) — $E_0(\tilde{H}(\boldsymbol{a},V)) \leq E_0(\tilde{H}(\boldsymbol{0},V))$ が成立することが示される (Cycon 他 (1987) の §6.6，Theorem 6.7).

(ii) 定理 13-26 は，粒子ハミルトニアン $H_{\mathrm{p}}(V)$ が準双線形形式 (2 次形式) の意味で定義される場合にも拡張されうる (ただし，この場合，$V \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{dN})$ とする)[18].

(iii) H_{PF} の自己共役拡大が生成する熱半群に関する反磁性的不等式が Hiroshima (1996, 1997) によって導出されている.

13-6 節　一般化されたスピン-ボソンモデル

この章を終えるにあたって，最近，著者らによって提唱され，研究されている**一般化**

---

[18] 2 次形式を用いてハミルトニアンを定義する方法については，たとえば，Simon (1971)，Reed and Simon (1975) の §X.3 を参照.

されたスピン-ボソンモデル (generalized spin-boson model; GSB モデルと略す) について簡単にふれておく．

$\mathscr{H}$ をヒルベルト空間とする．GSB モデルのためのヒルベルト空間は

$$\mathscr{F}_{\rm GSB} := \mathscr{H} \otimes \mathscr{F}_{\rm b}\Big(\overset{r}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$$

である $(r \in \mathbb{N})$．関数 $\omega : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty)$ をボレル可測で，ルベーグ測度に関して，a.e. 有限かつ正であるものとする．GSB モデルのハミルトニアン — **GSB ハミルトニアン**とよぶ — は

$$H_{\rm GSB} := A \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\rm b}(\omega) + \alpha \sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \Phi_{\rm S}(\lambda_j)$$

という形で定義される．ここで，A は $\mathscr{H}$ 上の下に有界な自己共役作用素，B_j $(j = 1, \cdots, J, J < \infty)$ は $\mathscr{H}$ 上の対称作用素，$\Phi_{\rm S}$ は $\mathscr{F}_{\rm b}\Big(\overset{r}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^d)\Big)$ における Segal の場の作用素，$\lambda_j \in \overset{r}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^d)$ $(j = 1, \cdots, J)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数を表すパラメータである．

GSB モデルの基本的な例をあげよう．

例 13-2　次の場合を考える：

$$\mathscr{H} = \mathbb{C}^2, \quad J = 1, \ r = 1,$$

$$A = \frac{\mu}{2}\sigma^3, \ B_1 = \sqrt{2}\sigma^1, \quad \lambda_1 = \lambda \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

ただし，$\mu > 0$ は定数，σ^j は Pauli 行列である．このとき，GSB ハミルトニアンは，

$$H_{SB} := \frac{\mu}{2}\sigma^3 \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\rm b}(\omega) + \sqrt{2}\alpha\sigma^1 \otimes \Phi_{\rm S}(\lambda)$$

となる．これは，2 つのエネルギー準位からなる "原子" と量子輻射場 (スカラー場で代用) の相互作用を記述するモデルで，**スピン-ボソンモデル**とよばれる．GSB モデルは，このモデルの抽象的一般化とみなされる[19]．スピン-ボソンモデルについては，詳しい結果が得られている．Davies (1981), Amann (1991), Spohn and Dümcke (1985), Fannes, Nachtergaele and Verbeure (1988), Spohn (1989), Arai (1990b), Spohn, Stückl and Wreszinski (1990), Hübner and Spohn (1995a, 1995b), Boutet de Monvel and Sahbani (1998), Hirokawa (1999a, 1999b) およびそこに引用されている文献を参照.

[19] GSB 型のモデルはすでに Davies (1981) が若干の考察を行っているが，そこでは B_j が有界の場合に限られている．

例 13-3　Λ を 3 次元立方格子 $\mathbb{Z}^3 := \{\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) \,|\, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3\}$ の有界集合とし，各格子点 $\boldsymbol{n} \in \Lambda$ にスピン作用素 $\boldsymbol{S} = (S^x, S^y, S^z)$ がのっているとする．ただし，S^x, S^y, S^z は $\mathbb{C}^{2s+1}$ 上の自己共役作用素である ($s \in \{1/2, 1, 3/2, 2, \cdots\}$)．このスピン系の状態ベクトルのヒルベルト空間は $\mathscr{H}_\Lambda := \bigotimes_{\boldsymbol{n}\in\Lambda} \mathscr{H}_{\boldsymbol{n}}$ ($\mathscr{H}_{\boldsymbol{n}} := \mathbb{C}^{2s+1}$, $\boldsymbol{n} \in \Lambda$) である．格子点 $\boldsymbol{n}$ におけるスピン作用素を $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{n}} := (S^x_{\boldsymbol{n}}, S^y_{\boldsymbol{n}}, S^z_{\boldsymbol{n}})$ によって定義する．ただし，$S^\sharp_{\boldsymbol{n}} := I \otimes \cdots \otimes S^\sharp \otimes \cdots \otimes I$ (右辺の $S^\sharp$ は $\mathscr{H}_{\boldsymbol{n}}$ 上に作用する)．$\boldsymbol{n} \in \Lambda, a = x, y, z$ に対して，$\lambda^{(a)}_{\boldsymbol{n}} \in \overset{r}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^3)$ とし，$J_{\boldsymbol{nm}}$ ($\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \Lambda$) を実定数とする．このとき，ヒルベルト空間 $\mathscr{H}_\Lambda \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}\left(\overset{r}{\oplus} L^2(\mathbb{R}^3)\right)$ で働く作用素

$$H_\Lambda := \left(-\sum_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\in\Lambda} J_{\boldsymbol{nm}} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{m}}\right) \otimes I$$

$$+ I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \alpha \sum_{\boldsymbol{n}\in\Lambda} \sum_{a=x,y,z} S^a_{\boldsymbol{n}} \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(\lambda^{(a)}_{\boldsymbol{n}})$$

は GSB ミルトニアンの具体的実現の 1 つである．これは量子スピン格子系とボース場との相互作用モデルの 1 つとみなすことができる．

例 13-4　$M > 0$ を定数，Δ を $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上の一般化されたラプラシアン，$V : \mathbb{R}^{dN} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ボレル可測)，B_j を $L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上の対称作用素とするとき，$L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の作用素

$$H_{\mathrm{PB}} := \left(-\frac{1}{2M}\Delta + V\right) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \alpha \sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(\lambda_j)$$

は GSB ミルトニアンの具体的実現の 1 つをあたえる．これは，質量 M の粒子が N 個存在する系とボース場の相互作用モデルの 1 つである．

例 13-5　双極近似の Pauli-Fierz ハミルトニアン H_{DP} において，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}; g)^2$ の項を落として得られる作用素

$$H'_{\mathrm{DP}} := H_{\mathrm{p}}(V) \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{rad}} - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{d} \frac{q}{m} \boldsymbol{p}_{nj} \otimes A_j(\boldsymbol{0}; g)$$

は GSB ミルトニアンの具体的実現の 1 つである．

例 13-6　2 行 2 列の行列

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて，$\mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の作用素

$$H_{\mathrm{WW}} := \mu_0 c^* c \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \alpha\{c^* \otimes a(\lambda) + c \otimes a(\lambda)^*\}$$

を定義する．ここで，$\mu_0 \in \mathbb{R}$ は定数，$a(\cdot)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の消滅作用素であり，$\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$ である．H_{WW} をハミルトニアンとするモデルを **Wigner (ウィグナー)-Weisskopf (ヴァイスコフ) モデル**という (Weisskopf and Wigner (1930), Davies (1974))．生成・消滅作用素を Segal の場の作用素を用いて表す式 (4.70a), (4.70b) を使えば，

$$c^* \otimes a(\lambda) + c \otimes a(\lambda)^* = \left(\frac{c^* + c}{\sqrt{2}}\right) \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(\lambda) + \left(\frac{i(c^* - c)}{\sqrt{2}}\right) \otimes \Phi_{\mathrm{S}}(i\lambda)$$

と書けるので，Wigner-Weisskopf モデルは GSB モデルの 1 つの具現である．作用素 c は正準反交換関係

$$cc^* + c^*c = 1, \quad c^2 = 0, \quad {c^*}^2 = 0,$$

をみたすことに注意しよう．このモデルは，固有値問題に関して，いろいろと興味ある振る舞いを見せてくれる (Arai and Hirokawa (1999a), Hirokawa (1999b), Arai and Hirokawa (1999b))．

これらの例からわかるように，GSB モデルは，粒子と量子場の具体的な相互作用モデルのいくつかを包括するものである．

GSB モデルの性質は

$$\omega_0 := \operatorname*{ess.inf}_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d} \omega(\boldsymbol{k}) \geq 0$$

が正の場合と 0 の場合とに応じて異なる．後者の場合，すなわち，$\omega_0 = 0$ の場合は，van Hove モデルの場合に見たように，赤外発散の問題が絡んでくるので，特に注意深い解析が必要とされる．

$\omega_0 > 0$ の場合は，“自然な” 条件のもとで，H_{GSB} の基底状態の存在を非摂動的に証明することができ，H_{GSB} の本質的スペクトルを同定できる．だが，$\omega_0 = 0$ の場合は，$(\omega, \lambda_1, \cdots, \lambda_J)$ が赤外特異性をもたず (i.e., $\lambda_j/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $(j = 1, \cdots, J)$)，結合定数 α の大きさが一定の範囲にある場合にのみ，基底状態の存在を示すことができているだけである (Arai and Hirokawa (1997, 1999a))[20]．

他方，$(\omega, \lambda_1, \cdots, \lambda_J)$ が赤外特異性をもつ場合に，H_{GSB} の基底状態や他の固有ベ

---

[20] ごく最近 (1999 年 5 月)，Gérard (1999) は，この困難を克服する方法をあみだし，結合定数の大きさによらず，基底状態が存在することを示した．

クトルの非存在については，Arai, Hirokawa and Hiroshima (1999) によって研究されている．

ノート

13-3 節で定義した作用素 H ((13.15) 式) は，粒子系と量子場の相互作用モデルの抽象的統一をあたえる 1 つの形態である．定理 13-10 では，(13.18) という条件のもとで H の自己共役性を証明したが，この条件より，もっと弱い条件のもとで H が本質的に自己共役になるか否かを証明する問題は未解決である．

非相対論的 QED は現実的なモデルである．たとえば，**Lamb (ラム) シフト** — 水素原子の第 2 主エネルギー準位の微細構造における (Dirac 方程式による理論では説明できない) ずれ — を形式的・摂動論的に説明することができる (Bethe (1947), Welton (1948))．したがって，非相対論的 QED が有する真の数学的理念を探求することは極めて重要な意義をもつ．

Pauli-Fierz モデルのスペクトル解析についても，Nelson モデルの場合と同様，解析的摂動論では扱えない問題を研究することが重要である．

双極近似のハミルトニアン $H_{\rm DP}$ については，非摂動的にかなり詳しいことがわかっている (Arai (1981a, 1983a, 1983b, 1990b), Blanchard (1969), Hiroshima (1993), Spohn (1997))．

双極近似なしのハミルトニアン $H_{\rm PF}$ の基底状態の存在に関する最近の研究として，Hiroshima (1998b, 1999c, 1999d) がある．埋蔵固有値の摂動問題を含む，$H_{\rm PF}$ のスペクトル解析全般については，Bach, Fröhlich and Sigal (1995, 1998a, 1998b, 1999) を参照．

物質の安定性の観点からの非相対論的 QED の研究が Fefferman, Fröhlich, and Graf (1997) にある[21]

GSB モデルの例で非摂動的に解析できる，質量 0 の量子場のモデルの研究として Arai (1981b, 1981c,1989a) をあげておく．

13 章演習問題

♮**1.** (13.71) を次の手順で証明せよ．

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$g_\varepsilon(x) := (\|\Psi(x)\|^2 + \varepsilon)^{1/2}$ とおく．このとき，g_ε は微分可能で，すべての $n = 1, \cdots, N$, $j = 1, \cdots, d$ に対して

$$D_{nj} g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} g_\varepsilon(x)^{-1} D_{nj} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{dN},$$

を示せ．ただし，$f(x) := \|\Psi(x)\|^2$．

---

[21] 物質の安定性は，量子物理学の重要な主題の 1 つである．これは，平たく言えば，なぜこの宇宙が "安定" であるのかを量子論的な観点から根源的に認識しようとするものである．量子場の効果を考慮しない，物質の安定性の理論についての詳しい解説が，江沢 (1978a) にある．

(ii)　任意の $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{dN})$ に対して,

$$\langle D_{nj}u, \|\Psi(\cdot)\|\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\langle D_{nj}u, g_\varepsilon\rangle$$

を示せ.

(iii)　(i), (ii) から

$$\langle D_{nj}u, \|\Psi(\cdot)\|\rangle = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\langle u, \frac{1}{2}g_\varepsilon^{-1}D_{nj}f\right\rangle$$

を示せ.

(iv)　$D_{nj}f(x) = \langle D_{nj}\Psi(x), \Psi(x)\rangle + \langle \Psi(x), D_{nj}\Psi(x)\rangle$ を用いて

$$|D_{nj}f(x)| \le 2\|D_{nj}\Psi(x)\|\,\|\Psi(x)\|$$

を示せ.

(v)　(iv) を用いて

$$\left|\frac{1}{2}g_\varepsilon(x)^{-1}D_{nj}f(x)\right| \le \|D_{nj}\Psi(x)\|$$

を示せ.

(vi)　(iii), (v) とルベーグの優収束定理から

$$\langle D_{nj}u, \|\Psi(\cdot)\|\rangle = -\left\langle u, \frac{1}{2}\frac{D_{nj}f}{\|\Psi(\cdot)\|}\right\rangle$$

を導け.

(vii)　$D_{nj}f/\|\Psi(\cdot)\| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{dN})$ を示し,

$$D_{nj}\|\Psi(\cdot)\| = \frac{1}{2}\frac{D_{nj}f}{\|\Psi(\cdot)\|}$$

を結論せよ (この式の右辺の分母をはらえば, (13.71) が得られる).

2. 13-6 節で導入した GSB ハミルトニアン H_{GSB} について考え,

$$H_0 := A \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega)$$

とおく. 作用素 A, B_j $(j = 1, \cdots, J)$ は 13-3-1 項の仮定 (A) の (A.1) をみたすとする (もちろん, この場合, 不等式におけるノルムは $\mathscr{H}$ のノルムである). さらに, $\lambda_j \in D(\omega^{-1/2})$ $(j = 1, \cdots, J)$ とする. このとき

$$|\alpha|\sum_{j=1}^{J} a_j\|\omega^{-1/2}\lambda_j\|_{\oplus^r L^2(\mathbb{R}^d)} < 1$$

ならば, H_{GSB} は $D(H_0)$ 上で自己共役であり, H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役であること, および下に有界であることを示せ.

ヒント　定理 13-10 の証明と同様.

3. F を $\mathbb{R}^d$ 上の非負の実数値ボレル可測関数でルベーグ測度に関して a.e. 有限なものとし，$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mu_0 \in \mathbb{R}$ を定数とする．$\mu := \inf_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^d} F(\boldsymbol{k}) \geq 0$ とおく．$L^2(\mathbb{R}^d)$ から $\mathbb{C}$ への作用素 L_g を $L_g\psi := \langle g, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ $(\psi \in L^2(\mathbb{R}^d))$ によって定義する．

(i) L_g は有界であり，$\| L_g \| = \| g \|$ を示せ．

(ii) L_g^* の共役作用素 $L_g^* : \mathbb{C} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ は $L_g^* z = zg$ $(z \in \mathbb{C})$ であたえられることを示せ．

(iii) 直和ヒルベルト空間 $\mathscr{H} := \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素 h_0, h_1 を次のように定義する：

$$h_0 := \mu_0 \oplus F \quad (\text{直和作用素}: D(h_0) = \mathbb{C} \oplus D(F)),$$

$$h_1(z, \psi) := (L_g\psi, L_g^* z) = (\langle g, \psi\rangle, zg), \quad (z, \psi) \in \mathscr{H}.$$

h_0 は自己共役で，$h_0 \geq \min\{\mu_0, \mu\}$ を示せ．また，h_1 は有界な自己共役作用素であることを示せ．

(iv) 作用素 $h := h_0 + \alpha h_1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ は定数パラメータ) は $D(h_0)$ 上で自己共役であり，下に有界で，

$$h \geq \frac{\mu_0 + \mu - \sqrt{(\mu_0 - \mu)^2 + 4\alpha^2 \| g \|^2}}{2} \qquad (*)$$

であることを示せ．

ヒント h の自己共役性と下界性については，加藤-レリッヒの定理を応用せよ．h の下界の評価に関しては，任意の $\Psi = (z, \psi) \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, h\Psi\rangle = \mu_0|z|^2 + \langle \psi, F\psi\rangle + \alpha(z^*\langle g, \psi\rangle + z\langle \psi, g\rangle)$$

$$\geq \mu_0|z|^2 + \mu\| \psi \|^2 - 2|\alpha|\,|z|\,\| g \|\,\| \psi \|$$

と評価し，2 次形式 $\mu_0 x^2 + \mu y^2 - 2cxy$ $(x, y \in \mathbb{R}, c := |\alpha|\,\| g \|)$ をあたえる対称行列の固有値問題を解け．なお，粗く評価するならば，

$$h \geq E_0(h_0) - \| h_1 \| = \min\{\mu_0, \mu\} - |\alpha|\,\| g \|$$

であるが，上の評価はこれよりも良い (すなわち，$\mu \neq \mu_0$ かつ $\alpha\| g \| \neq 0$ ならば，$(*)$ の右辺 $> \min\{\mu_0, \mu\} - |\alpha|\| g \|$)．

注意 作用素 h をハミルトニアンとする量子力学モデルは **Friedrichs (フリードリクス) モデル**とよばれる．これは 1 個のエネルギー準位 (μ_0) だけをもつ "原子" が 1 個のボソンと相互作用する系を記述する．$\{F(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^d\} = [\mu, \infty)$ で，$\mu_0 > \mu$ ならば，μ_0 は h_0 の埋蔵固有値である．したがって，h は埋蔵固有値の摂動問題における非自明な例の 1 つをあたえる．ある条件のもとで，この埋蔵固有値は，摂動 αh_1 のもとで消えてしまうことが証明される．

Friedrichs モデルのハミルトニアン h の第 2 量子化は，1 次元量子調和振動子が d 次元ボース場と相互作用する系のハミルトニアンの 1 つになる．この場合，埋蔵固有値のふるまいに多

様性があることが示される．この意味で，この量子場モデルは興味深い側面を持つ．詳しくは，Arai (1989a), Arai and Hirokawa (1999a) を参照されたい．

付 録 E

ヒルベルト空間値関数の積分

(X, Σ, μ) を σ 有限な測度空間 (1-2 節を参照)，$\mathscr{H}$ を可分なヒルベルト空間とする．X 上の $\mathscr{H}$-値可測関数 $F : X \longrightarrow \mathscr{H}$ で

$$\int_X \|F(x)\| \, d\mu(x) < \infty$$

をみたすものの全体を $L^1(X, d\mu; \mathscr{H})$ と記す．

$F \in L^1(X, d\mu; \mathscr{H})$ とする．$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathscr{H}$ の CONS としよう．したがって，$F(x) = \sum_{n=1}^\infty \langle e_n, F(x)\rangle e_n$ と展開できる．X 上の $\mathbb{C}$-値関数：$x \longrightarrow \langle e_n, F(x)\rangle$ は可測であり，$|\langle e_n, F(x)\rangle| \le \|F(x)\|$ であるから，$\int_X |\langle e_n, F(x)\rangle| \, d\mu(x) < \infty$．したがって，各 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathscr{H}$ のベクトル

$$I_N(F) := \sum_{n=1}^N \left(\int_X \langle e_n, F(x)\rangle \, d\mu(x) \right) e_n$$

が定義される．

補題 E-1 $\{I_N(F)\}_{N=1}^\infty$ は $\mathscr{H}$ のコーシー列である．さらに，$\lim_{N\to\infty} I_N(F)$ は CONS $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ の選び方に依らない．

証明 $M > N$ とすれば，

$$\begin{aligned} \| I_M(F) - I_N(F) \|^2 &= \sum_{n=N+1}^M \left| \int_X \langle e_n, F(x)\rangle \, d\mu(x) \right|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^M \int_X \langle e_n, F(x)\rangle \, d\mu(x) \int_X \langle F(y), e_n\rangle \, d\mu(y) \end{aligned}$$

$$= \int_X d\mu(x) \int_X d\mu(y) \langle F(y), G_{N,M}(x) \rangle.$$

ただし，$G_{N,M}(x) = \sum_{n=N+1}^{M} \langle e_n, F(x) \rangle e_n$．次の事実に注意する：

$$\lim_{M,N\to\infty} G_{N,M}(x) = 0, \quad \|G_{N,M}(x)\| \le \|F(x)\| \quad (\because \text{ベッセルの不等式}).$$

したがって，$|\langle F(y), G_{N,M}(x) \rangle| \le \|F(y)\| \|F(x)\|$．右辺は $d\mu(x)d\mu(y)$ について可積分である．ゆえに，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_X d\mu(x) \int_X d\mu(y) \langle F(y), G_{N,M}(x) \rangle = 0.$$

これは，$\|I_M(F) - I_N(F)\|^2 \longrightarrow 0$ $(M, N \longrightarrow \infty)$ を意味する．$M < N$ の場合も同様．よって，$\{I_N(F)\}_{N=1}^{\infty}$ はコーシー列である．

前段の結果により，

$$I(F) := \lim_{N\to\infty} I_N(F)$$

が存在する．これが CONS $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ の選び方によらないことを示すために，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathscr{H}$ の別の CONS とし，

$$I'(F) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\int_X \langle f_n, F(x) \rangle \, d\mu(x) \right) f_n$$

とおく．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\langle I(F) - I'(F), e_n \rangle$$

$$= \int_X \langle F(x), e_n \rangle \, d\mu(x) - \lim_{M\to\infty} \int_X \left\langle \sum_{m=1}^{M} \langle f_m, F(x) \rangle f_m, e_n \right\rangle d\mu(x)$$

次の事実に注意する：

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \langle f_m, F(x) \rangle f_m = F(x), \quad \left\| \sum_{m=1}^{M} \langle f_m, F(x) \rangle f_m \right\| \le \|F(x)\|.$$

したがって，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{M\to\infty} \int_X d\mu(x) \left\langle \sum_{m=1}^{M} \langle f_m, F(x) \rangle f_m, e_n \right\rangle = \int_X \langle F(x), e_n \rangle \, d\mu(x).$$

ゆえに，$\langle I(F) - I'(F), e_n \rangle = 0$ $(n \in \mathbb{N})$．これは $I(F) - I'(F) = 0$ を意味する．□

上の補題に基づいて，$F \in L^1(X, d\mu; \mathscr{H})$ に対して，

$$\int_X F(x) d\mu(x) := \lim_{N\to\infty} I_N(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X \langle e_n, F(x) \rangle \, d\mu(x) \right) e_n \qquad \text{(E.1)}$$

を定義し，これを $\mathscr{H}$-値関数 F の測度 μ に関する**強積分** (strong integral) またはボッホナー (Bochner) **積分**という．この積分の基本的性質は次の命題にまとめられる．

命題 E-2　$F, G \in L^1(X, d\mu; \mathscr{H})$ とする．

(i)　任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\int_X \{\alpha F(x) + \beta G(x)\}\, d\mu(x) = \alpha \int_X F(x)\, d\mu(x) + \beta \int_X G(x)\, d\mu(x).$$

(ii)　任意の $\psi \in \mathscr{H}$ に対して，

$$\left\langle \psi, \int_X F(x)\, d\mu(x) \right\rangle = \int_X \langle \psi, F(x) \rangle\, d\mu(x) \tag{E.2}$$

が成り立つ．

(iii)

$$\left\langle \int_X F(x)\, d\mu(x), \int_X G(x) d\mu(x) \right\rangle = \int_X \int_X \langle F(x), G(y) \rangle\, d\mu(x) d\mu(y) \tag{E.3}$$

が成り立つ．

証明　(i) は定義から容易にわかる．

(ii) 内積の連続性により，

$$\begin{aligned}\left\langle \psi, \int_X F(x)\, d\mu(x) \right\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi, e_n \rangle \int_X \langle e_n, F(x) \rangle\, d\mu(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_X \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, \psi \rangle e_n, F(x) \right\rangle d\mu(x).\end{aligned}$$

次の事実に注意する：

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, \psi \rangle e_n, F(x) \right\rangle = \langle \psi, F(x) \rangle,$$

$$\left| \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, \psi \rangle e_n, F(x) \right\rangle \right| \leq \|\psi\| \|F(x)\|.$$

関数 $\|\psi\|\,\|F(x)\|$ は μ について可積分であるから，ルベーグの優収束定理によって，

$$\lim_{N\to\infty} \int_X \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, \psi \rangle e_n, F(x) \right\rangle d\mu(x) = \int_X \langle \psi, F(x) \rangle\, d\mu(x).$$

ゆえに (E.2) を得る．

(iii) 内積の連続性により，

$$\left\langle \int_X F(x)\, d\mu(x), \int_X G(x)\, d\mu(x) \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \int_X \langle F(x), \psi_N(y) \rangle\, d\mu(x) d\mu(y).$$

と書ける．ただし，$\psi_N(y) := \sum_{n=1}^{N} \langle e_n, G(y)\rangle e_n$．次の事実に注意する：

$$\lim_{N\to\infty} \psi_N(y) = G(y), \quad |\langle F(x), \psi_N(y)\rangle| \le \|F(x)\|\,\|G(y)\|.$$

したがって，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{N\to\infty} \int_X \langle F(x), \psi_N(y)\rangle\, d\mu(x)d\mu(y). = \int_X \langle F(x), G(y)\rangle\, d\mu(x)d\mu(y)$$

を得る．ゆえに (E.3) が成立する．　□

注意 E-1　$X = \mathbb{R}^d$, $\Sigma = \boldsymbol{B}^d$ (d 次元ボレル集合体), $d\mu = dx$ (d 次元ルベーグ測度) の場合，$F \in L^1(\mathbb{R}^d, dx; \mathscr{H})$ で F が強連続ならば，$\mathscr{H}$-値リーマン積分の意味で $\int_{\mathbb{R}^d} F(x)\,dx$ が定義される[1)]．これが上に定義した強積分と一致することを示すのは難しくない．

[1)] 新井 (1997a) の 4 章，4.3 節，4.3.1 項，新井-江沢 (1999b) の 3 章，3.5 節，3.5.2 項を参照．これらの本では 1 次元 ($d = 1$) の場合しか扱っていないが，一般の $\mathbb{R}^d$ 上の強連続な $\mathscr{H}$-値関数に対するリーマン積分も $\mathbb{C}$-値関数の場合と同様な仕方で定義される．

参考文献

[1] Adler, S. L. (1995), *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields*, Oxford University, New York.

[2] Aitchson, I. J. R. (1982), *An Informal Introduction to Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge, 邦訳：I. J. R. エイスチン『ゲージ場入門』(藤井昭彦訳), 講談社, 1985.

[3] Albeverio, S. (1974), An introduction to some mathematical aspects of scattering theory in models of quantum fields, *Scattering Theory in Mathematical Physics*, edited by J. A. Lavita and J.-P. Marchand, Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[4] Albeverio, S. and Høegh-Krohn, R. (1976), *Mathematical Theory of Feynman Integrals*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

[5] Albeverio, S., Paycha, S. and Scarlatti, S. (1989), A short overview of mathematical approaches to functional integration, *Functional Integration, Geometry and Strings* (the Proceedings of the XXV Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Z. Haba and J. Sobczyk, Ed.), Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin.

[6] Albeverio, S., Gottschalk, H. and Wu, J.-L. (1997), Remarks on some new models of interacting quantum fields with indefinite metric, Rep. Math. Phys., **40**, 385–394.

[7] Alvarez-Gaumé, L. (1983), Supersymmetry and the Atiyah-Singer index theorem, Commun. Math. Phys., **90**, 161–173.

[8] Amann, A. (1991), Ground states of a spin-boson model, Ann. Phys., **208**, 414–448.

[9] Ammari, Z. (2000), Asymptotic completeness for a renormalized nonrelativistic hamiltonian in quantum field theory: the Nelson model, Centre de Mathématiques Ecole Polytechnique, preprint No. 2000-4.

[10] Arai, A. (1981a), Self-adjointness and spectrum of Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics 534–537, J. Math. Phys., **22**.

[11] Arai, A. (1981b), On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field I, J. Math. Phys., **22**, 2539–2548.

[12] Arai, A. (1981c), On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field II, J. Math. Phys., **22**, 2549–2552.

[13] Arai, A. (1983a), Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, J. Math. Phys., **24**, 1896–1910.

[14] Arai, A. (1983b), A note on scattering theory in non-relativisitc quantum electrodynamics, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 49–70.

[15] Arai, A. (1983c), On the existence of solution to Schwinger's functional differential equations of higher order, Proc. Japan Acad. Ser. A, **59**, 227–230.

[16] Arai, A. (1984), On mathematical construction of supersymmetric quantum field theory associated with Parisi-Wu stochastic quantization, Max-Planck-Institute Report MPI-PAE/PTh 60/84, München.

[17] Arai, A. (1985), Supersymmetry and singular perturbations, J. Funct. Anal., **60**, 378–393.

[18] Arai, A. (1986), On uniqueness theorem concerning the renormalized Schwinger-Dyson equations of first order, Kodai Math. Jour., **9**, 161–164.

[19] Arai, A. (1987), Some remarks on scattering theory in supersymmetric quantum systems, J. Math. Phys., **28**, 472–476.

[20] Arai, A. (1989a), Spectral analysis of a quantum harmonic oscillator coupled to infinitely many scalar bosons, J. Math. Anal. Appl., **140**, 270–288.

[21] Arai, A. (1989b), Path integral representation of the index of Kähler-Dirac operators on an infinite dimensional manifold, J. Funct. Anal., **82**, 330–369.

[22] Arai, A. (1989c), On the degeneracy in the ground state of the $N = 2$ Wess-Zumino supersymmetric quantum mechanics, J. Math. Phys., **30**, 2973–2977.

[23] Arai, A. (1990a), Perturbation of embedded eigenvalues: a general class of exactly soluble models in Fock spaces, Hokkaido Math. Jour., **19**, 1990, 1–34.

[24] Arai. A. (1990b), An asymptotic analysis and its application to the non-relativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model, J. Math. Phys., **31**, 2653-2663.

[25] Arai, A. (1991b), Non-invertible Bogoliubov transformations and instability of embedded eigenvalues, J. Math. Phys., **32**, 1838–1846.

[26] Arai, A. (1992a), A general class of infinite dimensional Dirac operators and path integral representation of their index J. Funct. Anal., **105**, 342–408.

[27] Arai, A. (1992b), Momentum operators with gauge potentials, local quantization of magnetic flux, and representation of canonical commutation relations, J. Math. Phys., **33**, 3374–3378.

[28] Arai, A. (1993a), Dirac operators in Boson-Fermion Fock spaces and super-

symmetric quantum field theory, J. Geome. Phys., **11**, 465–490.

[29] Arai, A. (1993b), Properties of the Dirac-Weyl operator with a strongly singular gauge potential, J. Math. Phys., **34**, 915–935.

[30] Arai, A. (1993c), Characterization of anticommutativity of self-adjoint operators in connection with Clifford algebra and applications, Integr. Equat. Oper. Th., **17**, 451–463.

[31] Arai, A (1993d), Supersymmetric extension of quantum scalar field theories, *Quantum and Noncommutative Analysis* (H. Araki et al, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 73-90.

[32] 新井朝雄 (1993e), 場の量子論の数理応用数理, **3**, 292–306.

[33] Arai, A. (1994a), On self-adjointness of Dirac operators in boson-fermion Fock spaces, Hokkaido Math. J., **23**, 319–353.

[34] 新井朝雄 (1994b), 超対称的場の量子論と無限次元解析 数学, **46**, 1–10.

[35] Arai, A. (1995a), Operator-theoretical analysis of a representation of a supersymmetry algebra in Hilbert space, J. Math. Phys., **36**, 613–621.

[36] Arai, A. (1995b), Gauge theory on a non-simply conneted domain and representations of canonical commutation relations, J. Math. Phys., **36**, 2569–2580.

[37] Arai, A. (1995c), Representation of canonical commutation relations in a gauge theory, the Aharonov-Bohm effect, and the Dirac-Weyl operator, J. Nonlinear Math. Phys., **2**, 247–262.

[38] Arai, A. (1996a), Trace formulas, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, J. Funct. Anal., **136**, 510–547.

[39] Arai, A. (1996b), Canonical commutation relations in a gauge theory, the Weierstrass Zeta-function, and infinite dimensional Hilbert space representations of the quantum group $U_q(sl_2)$, J. Math. Phys., **37**, 4203–4218.

[40] 新井朝雄 (1997a), 『ヒルベルト空間と量子力学』, 共立出版.

[41] 新井朝雄 (1997b), 『場の量子論の数学的方法入門』, Lecture Note Series in Mathematics Vol. 5, 大阪大学大学院理学研究科数学教室, Osaka Mathematical Publications.

[42] Arai, A. (1997c), A class of representations of the ∗-algebra of the canonical commutation relations over a Hilbert space and instability of embedded eigenvalues in quantum field models, J. Nonlinear Math. Phys., **4**, 338–349.

[43] 新井朝雄 (1997d), ゲージ理論における正準交換関係の表現とアハラノフ–ボーム効果, 荒木 (1997) の中の第 7 話.

[44] Arai, A. (1998), Representation-theoretic aspects of two-dimensional quantum systems in singular vector potentials: Canonical commutation relations, quantum algebras, and reduction to lattice quantum systems, J. Math. Phys., **39**, 2476–2498.

[45] Arai, A. (1999a), Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians Hokkaido University Preprint Series in Mathematics ♯445. J. Math. Annal. Appl. に掲載予定.

[46] Arai, A. (1999b), A class of Dirac-type operators on the abstract Boson-Fermion Fock space and their strong anticommutativity, 数理解析研究所講究録 1099 : 無限次元非可換解析学の展開.

[47] Arai, A. (1999c), Strong anticommutativity of Dirac operators on Boson-Fermion Fock spaces and representations of a supersymmetry algebra, Math. Nachr., **207**, 61–77.

[48] Arai, A. (1999d), Aspects of gauge quanutm mechanics on non-simply connected spaces, *Mathematical Methods of Quantum Physics* (Editors: C.C. Bernido et al), Gordon and Breach, 229–240.

[49] Arai, A. (1999e), Infinite dimensional analysis and analytic number theory, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics ♯450.

[50] Arai, A. and Ogurisu, O. (1991), Meromorphic $N = 2$ Wess-Zumino supersymmetric quantum mechanics, J. Math. Phys., **32**, 2427–2434.

[51] Arai, A. and Mitoma, I. (1991), De Rham-Hodge-Kodaira decomposition in ∞-dimensions, Math. Ann., **291**, 51–73.

[52] Arai, A. and Mitoma, I. (1993), Comparison and nuclearity of spaces of differential forms on topological vector spaces, J. Funct. Anal., **111**, 278–294.

[53] Arai, A. and Tominaga, N. (1996), Analysis of a family of strongly commuting self-adjoint operators with applications to perturbed d'Alembertians and the external field problem in quantum field theory, Hokkaido Math. J., **25**, 259–313.

[54] Arai, A. and Hirokawa, M. (1997), On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal., **151**, 455–503.

[55] Arai, A. and Hirokawa, M. (1999a), Ground states of a general class of quantum field Hamiltonians, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, ♯457, Rev. Math. Phys. に掲載予定.

[56] Arai, A. and Hirokawa, M. (1999b), Stability of ground states in sector and its application to the Wigner–Weisskopf model, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics ♯480, 2000.

[57] Arai, A., Hirokawa, M. and Hiroshima, F. (1999), On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff, J. Funct. Anal., **168**, 470–497.

[58] 新井朝雄-江沢 洋 (1999a), 『量子力学の数学的構造 I』, 朝倉物理学体系 (第 1 期)

7 巻, 朝倉書店.

[59] 新井朝雄-江沢 洋 (1999b), 『量子力学の数学的構造 II』, 朝倉物理学体系 (第 1 期) 8 巻, 朝倉書店.

[60] Araki, H. and Woods, E. J. (1963), Representations of the canonical commutation relations describing a nonrelativistic infinite free Bose gas, J. Math. Phys., **4**, 637–662.

[61] 荒木不二洋 (1993), 『量子場の数理』.

[62] 荒木不二洋 (編) (1997), 数理物理への誘い 2, 遊星社.

[63] M. Atiyah (1989), Topological quantum field theories, Inst. Hautes Studes Sci. Publ. Math., **68**, 175–186.

[64] Bach, V., Fröhlich, J. and Sigal, I.M. (1995), Mathematical theory of non-relativistic matter and radiation, Lett. Math. Phys., **34**, 183–201.

[65] Bach, V., Fröhlich, J. and Sigal, I. M. (1998a), Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, Adv. Math., **137**, 205–298.

[66] Bach, V., Fröhlich, J. and Sigal, I. M. (1998b), Quantum elecrodynamics of confined nonrelativistic particles, Adv. Math., **137**, 299–395.

[67] Bach, V., Fröhlich, J. and Sigal, I.M. (1999), Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, Comm. Math. Phys. **207**, 249–290.

[68] Bach, V., Fröhlich, J., Sigal, I. M. and Soffer, A. (1999), Positive commutators and the spectrum of Pauli-Fierz Hamiltonian of atoms and molecules, Commun. Math. Phys., **207**, 557–587.

[69] Baez, J.C., Segal, I.E. and Zhou, Z. (1992), *Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory*, Princeton University, Princeton.

[70] Bailin, D. and Love, A. (1994), *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol/Philadelphia.

[71] Baumann, K. (1989), On relativistic irreducible quantum fields fulfilling CCR, the IXth International Congress on Mathematical Physics (Ed., B. Simon, A. Truman, and I.M. Davies), IOP Publishing Ltd, Bristol, 483–487.

[72] Berezin, F. A. (1966), *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York.

[73] Bethe, H.A. (1947), The electromagnetic shift of energy levels, Phys.Rev., **72**, 339–241.

[74] Birmingham, D., Blau, M., Rakowski, M. and, Thompson, G. (1991) Topological field theory, Phys. Rep., **209**, 129–340.

[75] Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1964), *Relativistic Quantum Mechanics*,

McGraw-Hill, New York.

[76] Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1965), *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York.

[77] Blanchard, P. (1969), Discussion mathématique du modéle de Pauli et Fierz relatif á lacatastrophe infrarouge, Commun. Math. Phys., **15**, 156–172.

[78] ボゴリューボフ他 (1972), 『場の量子論の数学的方法』(江沢 洋ほか訳), 東京図書, 新版 1980.

[79] Borisov, N.V. and Ilinski, K.N. (1994), $N = 2$ supersymmetric quantum mechanics on Riemann surfaces with meromorphic superpotentials, Commun. Math. Phys., **161**, 177–194.

[80] Boutet de Monvel, A. and Sahbani, J. (1998), On the spectral properties of the spin-boson Hamiltonians, Lett. Math. Phys., **44**, 23–33.

[81] Bratteli, O. and Robinson, D. W. (1979), *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, Springer-Verlag, New York.

[82] Bratteli, O. and Robinson, D. W. (1997), *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Second Edition.

[83] ブルバキ, ニコラ (1970), 『ブルバキ数学史』(村田 全-清水達雄訳), 東京図書, 新装版 1993.

[84] Bursill, R. J. and Thompson, C. J. (1993), Rigorous treatment of the BCS model of superconductivity, J. Phys. A, **26**, 769–786.

[85] Cannon, J. T. (1971), Quantum field theoretic properties of a model of Nelson, J. Funct. Anal. **8**, 101–152.

[86] Cavallaro, S., Morchio, G. and Strocchi, F. (1999), A generalization of the Stone-von Neumann theorem to nonregular representations of the CCR-algebra, Lett. Math. Phys., **47**, 307–320.

[87] Connes, A. (1990), *Géométrie Non Commutative*, InterEditions, Paris, 邦訳：コンヌ『非可換幾何学入門』(丸山文綱訳), 岩波書店, 1999.

[88] Connes, A. (1994), *Non Commutative Geometry*, Academic Press, New York.

[89] Cook, J. M. (1953), The mathematics of second quantization, Trans. Amer. Math. Soc., **74**, 222-245.

[90] Cycon, H. L., Froese, R. G., Kirsch, W. and Simon, B. (1987), *Schrödinger Operators*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

[91] Damgaard, P. H. and Huffel, H. (ed.) (1988), *Stochastic Quantization*, World Scientific, Singapore.

[92] Davies, E.B. (1974), Dynamics of a multilevel Wigner–Weisskopf atom, J.

Math. Phys., **15**, 2036–2041.

[93] Davies, E. B. (1979), Particle-boson interaction and the weak coupling limit, J. Math. Phys., **20**, 345–351.

[94] Davies, E.B. (1981), Symmetry breaking for molecular open systems, Ann. Inst. henri Poincaré, **XXXV**, 149–171.

[95] Deligne, P. et al (Editors) (1999), *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, American Math. Sco., Institute for Advanced Study.

[96] Dereziński, J. and Jakšić, V. (1998), Spectral theory of Pauli-Fierz Hamiltonians I, preprint.

[97] Dereziński, J. and Gérard, C. (1999), Asymptotic completeness in quantum field theory, Massive Pauli-Fierz Hamiltonians, Rev. Math. Phys., **11**, 383–450.

[98] Dereziński, J. and Gérard, C. (1998), Spectral and scattering theory of spatially cutoff Hamiltonians $P(\varphi)_2$ Hamiltonians, MaPhySto Research Report no. 32.

[99] G. Dorfmeister and J. Dorfmeister (1984), Classification of certain pairs of operators (P,Q) satisfying $[P,Q] = -i\,Id$, J. Funct. Anal., **57**, 301–328.

[100] Dütsch, M. and Fredenhagen, K. (1999), A local (perturbative) construction of observables in gauge theories: the example of QED, Commun. Math. Phys., **203**, 71–105.

[101] 江沢 洋 (1978a), 物質の安定性, 江沢 洋-恒藤敏彦 (編) (1978) の 22 章.

[102] 江沢 洋 (1978b), 量子力学の構造, 湯川-豊田 (1978) の第 VI 部.

[103] 江沢 洋 (1988), 場の量子論の数理, 江沢-小嶋 (1988) の 1 章.

[104] 江沢 洋 (1991), 場の数理科学の始まり, 場の物理と数理 (別冊『数理科学』) の I, 序の章.

[105] 江沢 洋 (編) (1994), 『数理物理への誘い』, 遊星社.

[106] 江沢 洋-新井朝雄 (1988), 『場の量子論と統計力学』, 日本評論社, 東京 (第 2 刷 : 1999).

[107] 江沢 洋-小嶋 泉 (編)(1988), 『数理物理学の展開』, 東京図書.

[108] 江沢 洋-恒藤敏彦 (編) (1977), 『量子物理学の展望 上』, 岩波書店.

[109] 江沢 洋-恒藤敏彦 (編) (1978), 『量子物理学の展望 下』, 岩波書店.

[110] 江沢 洋-渡辺敬二-鈴木増雄-田崎晴明 (1994), 『くりこみ群の方法』(岩波講座 現代の物理学 13), 岩波書店.

[111] Fannes, M., Nachtergaele, B. and Verbeure, A. (1988), The equilibrium states of the spin-boson model, Commun. Math. Phys., **114**, 537–548.

[112] Fefferman, C., Fröhlich, J. and Graf, G. M. (1997), Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, Commun. Math.

Phys., **190**, 309–330.

[113] Fernández, R., Fröhlich, J. and Socal, A. (1992), *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*, Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg.

[114] Feynman, R. (1948), Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys., **20**, 367–387.

[115] Feynman, R. and Hibbs, A. (1965), *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 邦訳；ファインマン-ヒッブス『量子力学と経路積分』(北原和夫訳), みすず書房, 1995.

[116] Fock, V. (1932), Konfigurationsraum und Zweite Quantelung, Z. Phys., **75**, 622–647.

[117] Fredholm, I. (1903), Sur une classe d'equations fonctionelles, Acta Math., **27**, 365–390.

[118] Freund, P. G. O. (1986), *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University, Cambridge.

[119] Friedrichs, K. O. (1953), *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*, Wiley-Interscience, New York.

[120] Fröhlich, J. (1973), On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons, Ann. Inst. Henri Poincaré Sec.A, **XIX**, 1–103.

[121] Fröhlich, J. (1974), Existence of dressed one electron states in a class of persistent models, Fortschritte der Physik, **22**, 159–198.

[122] Fröhlich, J. and Park, Y. M. (1978), Correlation inequalities and the thermodynamic limit for classical and quantum continuous system, Commun. Math. Phys., **59**, 235–266.

[123] Fröhlich, J. and Park, Y. M. (1980), Correlation inequalities and the thermodynamic limit for classical and quantum continuous system II. Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics, J. Stat. Phys., **23**, 701–753.

[124] Fröhlich, J., Grandjean, O. and Recknagel, A. (1999), Supersymmetric quantum theory and non-commutative geometry, Commn. Math. Phys., **203**, 119–184.

[125] Fuglede, B. (1967), On the relation $PQ - QP = -iI$, Math.Scand., **20**, 1967, 79–88.

[126] Gårding, L. and Wightman, A.S. (1954), Representations of the commutation relations, Proceedings of the National Academy of Science (USA), **40**, 622–626.

[127] Gel'fand, I. M. (1987), *Collected Papers Vol.I*, Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg.

[128] Gel'fand, I. M. (1954), Some aspects of functional analysis and algebra,

Proc. Int. Congr. Math. 1954 Amsterdam, **1**, 253–276 [Gel'fand (1987) の pp.3–26].

[129] Gel'fand, I. M. and Minlos, R. A. (1954), Solution of quantum field equations, Dokl.Acad. Nauk SSSR, **97**, 209–212 [Gelfand (1987) の pp.462–465].

[130] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E. (1964), *Generalized Functions Vol.I*, Academic Press, New York.

[131] Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E. (1968), *Generalized Functions Vol.II*, Academic Press, New York.

[132] Gel'fand, I. M. and Vilenkin, N. Ya. (1964), *Generalized Functions IV; Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York.

[133] Gérard, C. (1996), Asymptotic completeness for spin-boson model with a particle number cutoff, Rev. Math. Phys., **8**, 549–589.

[134] Gérard, C. (1999), On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, プレプリント.

[135] Gerisch, T. and Rieckers, A. (1997), Limiting dynamics, KMS-states, and macroscopic phase angle for weakly inhomogeneous BCS-models, Helv. Phys. Acta, **70**, 727–750.

[136] Gilbert, J. E. and Murray, M. A. M. (1991), *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic*, Analysis Cambridge University Press, Cambridge.

[137] Gilkey, P. B. (1995), *Invarinace Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, CRC Press, Second Edition, Boca Paton/Ann Arbor /London/Tokyo.

[138] Glimm, J. and Jaffe, A. (1985), *Collected Papers Vol.I, II*, Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart.

[139] Glimm, J. and Jaffe, A. (1987), *Quantum Physics (2nd Edition)*, Springer-Verlag, New York.

[140] Grassberger, P. and Scheunert, M. (1980), Fock-Space methods for identical classical objects, Fortsch. Phys., **28**, 547–578.

[141] Gross, L. (1977), On the formula of Matthews and Salam, J. Funct. Anal., **25**, 162–209.

[142] Grosse, H. and Pittner, L. (1987), Supersymmetric quantum mechanics defined as sesquilinear forms, J. Phys. A: Math. Gen., **20**, 4265–4284.

[143] Grosse, H., Klimčik, C. and Prešnajder, P. (1996), On finite 4D quantum field theory in non-commutative geometry, Commun. Math. Phys., **180**, 429–438.

[144] Grosse, H. and Strohmaier, A. (1999), Noncommutative geometry and the regularization problem of 4D quantum field theory, Lett. Math. Phys., **48**, 163–179.

[145] Haag, R. (1962), The mathematical structure of the Bardeen-Cooper-

Schrieffer model, IL Nuovo Cimento, **XXV**, 287–299.

[146] Haag, R. (1992), *Local Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg /New York.

[147] Halzen, F. and Martin, A. D. (1984), *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, New York, 邦訳：ハルツェン-マーチン『クォークとレプトン— 現代素粒子物理学入門—』(小林-広瀬共訳), 培風館, 1986.

[148] Heisenberg, W. and Pauli, W. (1929), Zur Quantendynamik der Wellenfelder I, Z. Physik **56**, 1-61.

[149] Heisenberg, W. and Pauli, W. (1930), Zur Quantendynamik der Wellenfelder II, Z. Physik **59**, 168–190.

[150] Henley, E.M. and Thirring, W. (1962), *Elementary Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 邦訳：ヘンリー・ティリング『初等 場の量子論』(野上幸久訳), 講談社, 1974.

[151] 日合文雄-柳研二郎 (1995), 『ヒルベルト空間と線形作用素』, 牧野書店.

[152] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J., and Streit, L. (1993), *White Noise*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[153] Hino, M. (1997), Spectral properties of Laplacians on an Abstract Wiener space with a weighted Wiener measure, J. Funct. Anal., **147**, 485–520.

[154] Hirokawa, M. (1997), Canonical quantization on a doubly connected space and the Aharanov-Bohm phase, J. Funct. Annal. 掲載予定.

[155] Hirokawa, M. (1999a), An expression of the ground state energy of the spin-boson model, J. Funct. Anal., **162**, 178–218.

[156] Hirokawa, M. (1999b), Remarks on the ground state energy of the spin-boson model without infrared cutoff. An application of the Wigner–Weisskopf model. Rev. Math. Phys. 掲載予定.

[157] Hiroshima, F. (1993), Scaling limit of a model in quantum electrodynamics, J. Math. Phys., **34**, 4478-4518.

[158] Hiroshima, F. (1996), Diamagnetic inequalities for systems of nonrelativistic particles with a quantized field, Rev. Math. Phys., **8**, 185–203.

[159] Hiroshima, F. (1997), Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, Rev. Math. Phys., **9**, 489–530.

[160] Hiroshima, F. (1998a), Weak coupling limit and a removal of an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a massive scalar field, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability, and Related Topics **1**, 407–423.

[161] Hiroshima, F. (1998b), Ground states and spectrum of quantum electrodynamics of nonrelativistic particles. プレプリント.

[162] Hiroshima, F. (1999a), Weak coupling limit and a removal of an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, J. Math. Phys., **40**, 1215-1236.

[163] Hiroshima, F. (1999b), Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants, Comm. Math. Phys. に掲載予定.

[164] Hiroshima, F. (1999c), Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics I., J. Math. Phys., **40**, 6209–6222.

[165] Hiroshima, F. (2000), Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II. J. Math. Phys., **41**, 661–674.

[166] Hiroshima, F. (1999d), Applications of functional integrals to models minimally coupled to massless quantum fields, プレプリント.

[167] Hladik, J. (1999), *Spinors in Physics*, Springer-Verlag, New York.

[168] Hϕegh-Krohn, R. (1968), Asymptotic fields in some models of quantum field theory. I, J. Math. Phys., **9**, 2075–2080.

[169] Hϕegh-Krohn, R. (1969), Asymptotic fields in some models of quantum field theory. II, J. Math. Phys., **10**, 639–643.

[170] Hϕegh-Krohn, R. (1970), Asymptotic fields in some models of quantum field theory. III, J. Math. Phys., **11**, 185–188.

[171] Hofmann, G. (1997), The Hilbert space structure condition for quantum field theories with indefinite metric and transformations with linear functionals, Lett. Math. Phys., **42**, 281–295.

[172] van Hove, L. (1952), Les difficulté de divergence pour un modéle particulier de champ quantifié, Physica, **18**, 145–159.

[173] Hübner, M. and Spohn, H. (1995a), Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian, Ann.Inst. Henri Poincaré Sec.A, **62**, 289–323.

[174] Hübner, M. and Spohn, H. (1995b), Radiative decay: nonperturbative approach, Rev. Math. Phys. **7**, 363–387.

[175] 藤原大輔 (1999), ファインマン経路積分の数学的方法—時間分割近似法, シュプリンガー・フェアラーク東京.

[176] Ichinose, T. (1970), On the spectra of tensor products of linear operators on Banach spaces, J. Reine Angew. Math., **244**, 119–153.

[177] Ichinose, T. (1972), Operators on tensor products of Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **170**, 197–219.

[178] Ichinose, T. (1975), Operational calculus for tensor products of linear operators on Banach spaces, Hokkaido Math. J., **4**, 306–334.

[179] Ilinski, K.N., Kalinin, G.V. and Melezhik, V.V. (1995), Berry phase and supersymmetric topological index, J. Math. Phys., **36**, 6611–6624.

[180] Inoue, A. (1986), Some examples exhibiting the procedures of renormalization and gauge fixing-Schwinger-Dyson equations of first order, Kodai Math. Jour., **9**, 134–160.

[181] 井上 淳 (1990), 汎関数微分方程式について – 汎関数空間上の解析学の勧め, I, II 数学, **42**, 170–177.

[182] Inoue, A. (1998), *Tomita-Takesaki Theory in Algebras of Unbounded Operators*, Lecture Notes in Mathematics 1699, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

[183] 伊藤清三 (1963), 『ルベーグ積分入門』, 裳華房.

[184] Itzykson, C. and Zuber, J.-B. (1980), *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York.

[185] Jaffe, A., Lesniewski, A. and Lewenstein, M. (1987), Ground state structure in supersymmetric quantum mechanics, Ann. Phys., **178**, 313–329.

[186] Jaffe, A. and Lesniewski, A. (1988), Supersymmetric quantum fields and infinite dimensional analysis, Nonperturbative Quantum Field Theory (Eds. G.'t Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter and R. Stora), Plenum, New York.

[187] Jakšić, V. and Pillet, C. A. (1995), On a model for quantum friction. I. Fermi's golden rule and dynamics at zeto temperature, Ann. Inst. Henri Poincaré, **62**, 47–68.

[188] Jakšić, V. and Pillet, C.A. (1996), On a model for quantum friction. II. Fermi's golden rule and dynamics at positive temperature, Commun. Math. Phys., **176**, 619–644.

[189] Jost, R. (1963), *General Theory of Quantized Fields*, Lectures in Applied Mathematics IV: Proceedings of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1960 American Math. Soc., Providence.

[190] Kaku, M. (1988), *Introduction to Superstrings*, Springer-verlag, New York, 邦訳：カク ミチオ『超弦理論』(太田信義訳), シュプリンガー・フェアラーク東京, 1989.

[191] Kassel, C. (1995), *Quantum Groups*, Springer-Verlag, New York.

[192] 加藤敏夫 (1967), 『位相解析』, 共立出版.

[193] Kato, T. (1976), *Perturbation Theory for Linear Operators* (第 2 版), 初版は 1966, Springer-Verlag, Berlin.

[194] Kato, Y. (1961), Some converging examples of perturbation series in quantum field theory, Prog. Theor. Phys., **26**, 99–122.

[195] Kato, Y. and Mugibayashi, N. (1963), Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, Prog. Theor. Phys., **30**, 103–133.

[196] Kato, Y. and Mugibayashi, N. (1964), Regular perturbation and asymptotic limits of operators in fixed-source theory, Prog. Theor. Phys., **31**, 300–310.

[197] Kato, Y. and Mugibayashi, N. (1971), Asymptotic fields in model field theories. I— $\lambda(\phi^4)_2$ with space cutoff—, Prog. Theor. Phys., **45**, 628–639.

[198] 木下東一郎 (1977), 量子電磁力学の現状, 江沢-恒藤 (1977) の 12 章.

[199] 河野俊丈 (1998), 『場の理論とトポロジー』, 岩波書点.

[200] Kurose, H. and Nakazato, H. (1996), Geometric construction of ∗-representation of the Weyl algebra with degree 2 Publ. RIMS, Kyoto Univ., 32, 555-579.

[201] 黒田成俊 (1980), 『関数解析』, 共立出版社.

[202] Mac Lane, S. (1986), *Mathematics, Form and Function*, Springer-Verlag, New York, 邦訳：マックレーン『数学—その形式と機能』(赤尾和男-岡本周一共訳), 森北出版, 1992.

[203] Madore, J. (1995), *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 206, Cambridge University Press, Cambridge.

[204] マージナウ・マーフィー (1973), 『物理と化学のための数学 I』, (佐藤-国宗訳, 改訂版 28 刷), 共立出版.

[205] Matthews, P. T. and Salam, A. (1954), The Green's functions of quantized fields, Nuovo Cimento (Ser. 9), **12**, 563–565.

[206] Meyer P.-A. (1995), *Quantum Probability for Probabilists*, Lecture Notes in Mathematics 1538, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.

[207] Mitoma, I. (1991), De Rham-Kodaira decomposition and fundamental spaces of Wiener functionals, Gaussain Random Fields, 285–297, World Scientific, Singapore, 1991.

[208] Miyatake, O. (1952a), On the non-existence of solution of field equations in quantum mechanics, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A Math., **2**, 89–99.

[209] Miyatake, O. (1952b), On the singularity of the perturbation-term in the field quantum mechanics, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A Math., **3**, 145–155.

[210] Mnatsakanova, M., Morchio, G., Strocchi, F. and, Vernov, Yu. (1998) Irreducible representations of the Heisenberg algebra in Krein spaces, J. Math. Phys., **39**, 2969–2982.

[211] 永長直人 (1995), 『物性論における場の量子論』, 岩波書店.

[212] 長島順清 (1999a), 『素粒子物理学の基礎 I』, 朝倉物理学体系 (第 1 期) 3 巻, 朝倉書店.

[213] 長島順清 (1999b), 『素粒子物理学の基礎 II』, 朝倉物理学体系 (第 1 期) 4 巻, 朝倉書店.

[214] 長島順清 (1999c), 『素粒子標準理論と実験的基礎』, 朝倉物理学体系 (第 1 期) 5 巻, 朝倉書店

[215] 長島順清 (1999d), 『高エネルギー物理学の発展』, 朝倉物理学体系 (第 1 期) 6 巻, 朝倉書店.

[216] 中村 徹 (1998), 『超準解析と物理学』, 日本評論社.

[217] Nash, C. (1991), *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic, New York.

[218] Nelson, E. (1964), Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, J. Math. Phys., **5**, 1190–1197.

[219] Nelson, E. (1973), Construction of quantum fields from Markov fields, J. Funct. Anal., **12**, 97–112.

[220] von Neumann, J. (1931), Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Ann., **104**, 570–578.

[221] von Neumann, J. and Murray, F. (1936), On rings of operators, Ann. Math., **37**, 116–229.

[222] 西島和彦 (1973), 『相対論的量子力学』.

[223] 日本物理学会編 (1982), 『物質の窮極を探る—現代の統一理論』.

[224] Obata, N. (1994), *White Noise Calculus and Fock Space*, Lecture Notes in Mathematics **1577**, Springer-Verlag, Berlin.

[225] Okamoto, T. and Yajima, K. (1985), Complex scaling technique in nonrelativistic massive QED, Ann. Inst. Henri Poincaré, **42**, 311–327.

[226] Osterwalder, K. and Schrader, S. (1973), Axioms for Euclidean Green's functions I, Commun. Math. Phys., 83–112, **31**.

[227] Osterwalder, K. and Schrader, R. (1975), Axioms for Euclidean Green's functions II, Commun. Math. Phys., 281–305, **42**.

[228] Ottesen, J. T. (1995), *Infinite Dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Lecture Notes in Physics m27.

[229] Pauli, W. and Fierz, M. (1938), Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten, Nuovo Cimento, **15**, 167–188.

[230] Pittner, L. (1996), *Algebraic Foundations of Non-Commutative, Differential Geometry and Quantum Groups*, Springer-Verlag, Berlin.

[231] ポントリャーギン, エリ・エス (1957), 『連続群論 上』(柴岡泰光-杉浦光夫-宮崎 功共訳), 岩波書店.

[232] ポントリャーギン, エリ・エス (1958), 『連続群論 下』(柴岡泰光-杉浦光夫-宮崎 功 共訳), 岩波書店.

[233] Proksch, M., Reents, G. and Summers, S. J. (1995), Quadratic representations of the canonical commutation relations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **31**, 755–804.

[234] E. Prugovečki (1995), *Principles of Quantum General Relativity*, World Scientific, Singapore.

[235] Putnam, C. R. (1967), *Commutation Properties of Hilbert Space Operators*, Springer-Verlag, Berlin.

[236] Reed, M. and Simon, B. (1972), *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis*, Academic Press, New York.

[237] Reed, M. and Simon, B. (1973), Tensor products of closed operators on Banach spaces, J. Funct. Anal., **13**, 107–124.

[238] Reed, M. and Simon, B. (1975), *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.II: Fourier Analysis, Self-adjointness*, Academic Press, New York.

[239] Reed, M. and Simon, B. (1978), *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.IV: Analysis of Operators*, Academic, New York.

[240] Reed, M. and Simon, B. (1979), *Methods of Modern Mathematical Physics Vol.III: Scattering Theory*, Academic Press, New York.

[241] Reeh, H. (1988), A remark concerning canonical commutation relations J. Math. Phys., **29**, 1535–1536.

[242] Rivasseau, V. (1991), *From Perturbative to Constructive Renormalization*, Princeton University, Princeton.

[243] Rivers, R. J. (1987), *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University, Cambridge.

[244] Robinson, P. L. (1999), Polynomial Weyl representations, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **35**, 195–222.

[245] Ruijsenaars S. N. M. (1977), On Bogoliubov transformations for systems of relativistic charged particles, J. Math. Phys., **18**, 517-526.

[246] Ruijsenaars S. N. M. (1978), On Bogoliubov transformations II. The general case, Ann. Phys. (NY), **116**, 105-134.

[247] Salmhofer, M. (1999), *Renormalization*, Springer-Verlag, Berlin.

[248] 佐武一郎 (1974), 『線型代数学』, 裳華房.

[249] Scharf, G. (1989), *Finite Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag, Berlin/New York.

[250] Schmüdgen, K. (1983a), On the Heisenberg commutation relation. I, J. Funct. Anal., **50**, 8–49.

[251] Schmüdgen, K. (1983b), On the Heisenberg commutation relation II, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **19**, 1983, 601–671.

[252] Schmüdgen, K. (1990), *Unbounded Operator Algebras and Representation Theory*, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin.

[253] Schrader, R. (1974), Local operator products and field equations in $P(\phi)_2$ theories, Fortsch. Phys., **22**, 611–631.

[254] Schulman, L.S. (1981), *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley & Sons, New York, 邦訳：シュルマン『ファインマン経路積分』(高塚和夫訳), 講談社.

[255] Schutz, B.F. (1985), *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, 邦訳：シュッツ『相対論入門上下』(江里口-二間瀬訳), 丸善, 1988.

[256] シュワルツ, L. (1953), 『超関数論』, 岩波書店.

[257] シュワルツ, L. (1966), 『物理数学の方法』, 岩波書店.

[258] Schwarz, A. S. (1993), *Quantum Field Theory and Topology*, Springer-Verlag, Berlin.

[259] Schwinger, J. (1951), On the Green's functions of quantized fields, I, Proc. Nat. Acad., Sciences (U.S.A) **37**, 452–455.

[260] Schwinger, J. (1970), *Particles, Sources, and Fields Vol.I*, Addison-Wesley, Reading.

[261] Schwinger, J. (1973), *Particles, Sources, and Fields Vol.II*, Addison-Wesley, Reading.

[262] Segal, I. E. (1956), Tensor algebras over Hilbert spaces I, Trans. Amer. Math. Soc., **81**, 106–134.

[263] Seiler, E. (1975), Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space-time cutoff, Commun. Math. Phys., **42**, 163–182.

[264] Seiler, E. (1980), Some remarks on the fermion determinants in gauge theories, Phys. Rev., **D22**, 2412–2415.

[265] Seiler, E. and Simon, B. (1975), On finite mass renormalization in the two-dimensional Yukawa model, J. Math. Phys., **16**, 2289–2293.

[266] Shigekawa, I. (1986), De Rham-Hodge-Kodaira's decomposition on an abstract Wiener space, J. Math. Kyoto Univ., **26**, 191–202.

[267] 柴田敏男 (1970), 『位相解析』, 筑摩書房.

[268] Simon, B. (1971), *Quantum Mechanics for Hamiltonians, Defined as Quadratic Forms*, Princeton University Press, Princeton.

[269] Simon, B. (1974), *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton

University Press, Princeton.

[270] Simon, B. (1976), Universal diamagnetism of spinless boson systems, Phys. Rev. Lett., **36**, 804–806.

[271] Simon, B. (1977), Notes on infinite determinants of Hilbert space operators, Adv. Math., **24**, 244–273.

[272] Simon, B. (1979), *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York.

[273] Simon, B and Høegh-Krohn, R. (1972), Hypercontractive semigroups and two dimensional self-coupled Bose fields, J. Funct. Anal., **9**, 121–180.

[274] Skibsted, E. (1998), Spectral analysis of N-body systems coupled to a bosonic field, Rev. Math. Phys., **7**, 989–1026.

[275] Spector, D. (1990), Supersymmetry and the Möbius inversion function, Commun.Math. Phys. **127**, 239–252.

[276] Spohn, H. (1989), Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, Commun. Math. Phys., **123**, 277–304.

[277] Spohn, H. (1997), Asymptotic completeness for Rayleigh scattering, J. Math. Phys., **38**, 2281–2296.

[278] Spohn, H. (1998), Ground state of a quantum particle coupled to a scalar Bose field, Lett. Math. Phys., **44**, 9–16.

[279] Spohn, H. and Dümcke (1985), Quantum tunneling with dissipation and the Ising model over $\mathbb{R}$, J. Stat. Phys., **41**, 389–423.

[280] Spohn, H., Stückl, R. and Wreszinski, W. (1990), Localisation for the spin J-boson Hamiltonian, Ann. Inst. Henri Poincaré, **53**, 225–244.

[281] Steinmann, O. (1993), Perturbation theory of Wightman functions, Commun. Math. Phys., **152**, 627–645.

[282] Streater, R. and Wightman, A. S. (1964), *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, Reading.

[283] Strocchi, F. (1993), *Selected Topics on the General Properties of Qauntum Field Theory*, World Scientic Lecture Notes in Physics 51, World Scientific Publishing Co., River Edge.

[284] Strocchi, F. and Wightman, A.S. (1974), Proof of the charge superselection rule in local relativistic quantum field theory, J. Math. Phys., **15**, 2198–2224.

[285] Swanson, M.S. (1992), *Path Integrals and Quantum Processes*, Academic Press, New York, 邦訳：スワンソン『経路積分法』(青山秀明ほか訳), 吉岡書店, 1996

[286] 高野文彦 (1975), 『多体問題』, 培風館.

[287] 高橋 康 (1974), 『物性研究者のための場の量子論 I』.

[288] 高橋 康 (1976),『物性研究者のための場の量子論 II』.

[289] 高橋 康 (1979),『古典場から量子場へ』.

[290] 高橋 康,『量子場を学ぶための場の解析力学入門』.

[291] 高林武彦 (1977),『量子論の発展史』, 中央公論社.

[292] 武田 暁-宮沢弘成 (1974),『素粒子物理学』(7 版, 初版 1965), 裳華房.

[293] 竹之内脩 (1962),『トポロジー』, 廣川書店.

[294] Thaller, B. (1992), *The Dirac Equation*, Springer-Verlag, Berlin.

[295] テンプル, G. (1981),『物理・工学のためのルベーグ積分入門』(江沢 洋-南條昌司訳), ダイヤモンド社.

[296] 朝永振一郎 (1977a), 無限大の困難をめぐって, 江沢-恒藤 (1977) の 11 章, pp.289–318.

[297] 朝永振一郎 (1997b),『量子力学 II』(第 2 版)(初版は 1952 年), みすず書房.

[298] Trèves, F. (1967), *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 邦訳:『位相ベクトル空間・超関数・核』(上, 下) (松浦重武訳), 吉岡書店,1973, 1976.

[299] 湯川秀樹, 豊田利幸 (編)(1978),『岩波講座 現代物理学の基礎 4 量子力学 II』, 第 2 版, 岩波書店.

[300] Wakita, H. (1976), Integration of the Tomonaga-Schwinger equation, Commun. Math. Phys., **50**, 61–68.

[301] Wakita, H. (1984a), Mathematical framework of quantum electrodynamics, Math. Japon, **29**, 199–217.

[302] Wakita, H. (1984b), Solutions of the renormalized Tomonaga-Schwinger equation, Math. Japon, **29**, 321–328.

[303] Welton, T.A. (1948), Some observable effects of the quantum mechanical fluctuations of the electromagnetic field, Phys. Rev., **74**, 1157–1167.

[304] Weisskopf, V. F. and Wigner, E. P. (1930), Berechnung der natürlichen Linienbreite, auf Grund der Diracschen Lichttheorie, Z. Phys., **63**, 54–73.

[305] Wess, J. and Bagger, J. (1983), *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University, Princeton.

[306] Wightman, A. S. (1956), Quantum field theory in terms of vacuum expectation values Phys.Rev., **101**, 860–866.

[307] Wightman, A. S. and Gårding, L. (1964), Fields as operator-valued distributions in quantum field theory, Ark. für Phys., **28**, 129–184.

[308] Witten, E. (1981), Dynamical breaking of supersymetry, Nuclear Phys., **B 185**, 513–554.

[309] Witten, E. (1982a), Constraints on supersymmetry breaking, Nuclear Phys.,

B 202, 253–316.

[310] Witten, E. (1982b), Supersymmetry and Morse theory, J. Differential Geometry, **17**, 661-692.

[311] Witten, E. (1988), Topological quantum field theory, Commun. Math. Phys., **117**, 353–386.

[312] 山内恭彦-杉浦光夫 (1960), 『連続群論入門』, 培風館.

[313] 吉田朋好 (1998), 『ディラック作用素の指数定理』, 共立出版.

[314] Zinoviev, Y.M. (1995), Equivalence of Euclidean and Wightman field theories Commun. Math. Phys., **174**, 1–27.

[315] Ziman, J.M. (1969), *Elements of Advanced Quantum Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

索 引

1 巻は p.1～ p.314, 2 巻はそれ以降.

●さ行

●た行

●な行

●は行

●ま行

●や行

●ら行

新井朝雄 (あらい・あさお)

略歴

1954 年　埼玉県に生まれる

1976 年　千葉大学理学部物理学科を卒業

現　在　北海道大学大学院理学研究科数学専攻教授．理学博士．

著書に

『場の量子論と統計力学』(日本評論社，共著)

『対称性の数理』(日本評論社)

『ヒルベルト空間と量子力学』(共立出版)

『量子力学の数学的構造』1, 2 (共著，朝倉書店)

フォック空間と量子場 (下)　　数理物理シリーズ

2000 年 8 月 10 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者　新　井　朝　雄

発行者　大　石　進

発行所　株式会社 日 本 評 論 社

〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4

電話　(03) 3987-8621 [販売]

(03) 3987-8599 [編集]

印　刷　藤原印刷株式会社

製　本　牧製本印刷株式会社

ISBN 4-535-78318-7